Lab: Rotaciones y reflexiones en el plano
Tratamiento de señales

Matriz de rotación Si representamos los puntos del plano como vectores columna de dos dimensiones, la matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

rota el vector θ radianes en el sentido contrario a las agujas del reloj.

- Construimos una función `matrot` que construya la matriz de rotación de ángulo θ:

```
function R = matrot(theta)
    c = cos(theta);
    s = sin(theta);
    R = [c -s; s c];
end
```

- Construimos una función `puntos` que devuelva n puntos sobre la circunferencia unitaria que se correspondan con las n raíces n-ésimas de la unidad:

```
function X = puntos(n)
    theta = linspace(0, 2*pi, n+1);
    theta = theta(1:end-1);
    X = [cos(theta); sin(theta)];
end
```

- Construimos una función para dibujar los puntos en un diagrama polar. La función admite los puntos y el color:

```
function dibuja(X, color)
    theta = atan2(X(2,:), X(1,:));
    polarscatter(theta, ones(size(theta)), [1,2,3]*100, color, 'filled')
end
```

- Hacemos una prueba de las funciones que hemos desarrolado hasta ahora:

```
X = puntos(3);
R = matrot(pi/6);
Xr = R*X;
hold off;
dibuja(X, 'blue');
hold on;
dibuja(Xr, 'red');
```

Matriz de reflexión Las matrices R_x y R_y siguientes, reflejan con respecto a los ejes x e y respectivamente

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz que hace una reflexión con respecto a la recta de ángulo θ se puede construir como $S_\theta = R_\theta * R_x * R_\theta^{-1}$:

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

- Construimos una función `matref` que devuelva la matriz que refleja según la recta de ángulo θ

```
function R = matref(theta)
    c = cos(theta);
    s = sin(theta);
    R = [c*c-s*s 2*s*c; 2*s*c s*s-c*c];
end
```

- Probamos las funciones desarrolladas y observamos la diferencia entre una rotación y una reflexión (no podríamos saber si es una rotación o una reflexión si miráramos únicamente a los puntos de un único diámetro):

```
X = puntos(3);
R = matrot(pi/6);
S = matref(pi/6);
Xr = R*X;
Xs = S*X;
hold off; dibuja(X, 'blue');
hold on; dibuja(Xr, 'red');
hold on; dibuja(Xs, 'yellow');
```

Dos reflexiones son una rotación Las matrices de rotación tienen determinante 1 y las de reflexión -1. Por lo tanto, al componer dos rotaciones obtenemos una rotación y al componer dos reflexiones también.

- Comprobar que dos reflexiones son, en efecto, una rotación:

```
X = puntos(3);
S1 = matref(pi/6);
S2 = matref(pi/4);
X1 = S1*X;
X2 = S2*X1;
hold off; dibuja(X, 'blue');
hold on; dibuja(X1, 'red');
hold on; dibuja(X2, 'yellow');
```