Lab: Inversas de matrices perturbadas
Tratamiento de señales

Fórmula de Sherman-Morrison La fórmula de Sherman-Morrison establece que si $A \in C^{n\times n}$ es no singular, y $C, D \in C^{n\times k}$ son tales que $(I + D^T A^{-1} C)^{-1}$ existe, entonces:

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1} C)^{-1} D^T A^{-1}. \tag{1}$$

Para apreciar la utilidad del resultado, supongamos que conocemos A^{-1} de un cálculo anterior, pero que se debe modificar una componente de A (digamos que temos que añadir α a la componente a_{ij}). El resultado nos permite actualizar el valor de A^{-1} sin tener que volver a recalcular completamente dicha inversa.

Sean $c = e_i$ y $d = \alpha e_j$, donde e_i y e_j son los vectores canónicos con un 1 en las posiciones i y j, respectivamente. La matriz cd^T tiene α en la posición (i, j) y 0 en todas las demás posiciones; de forma que la matriz actualizada es $B = A + cd^T = A + \alpha e_i e_j^T$.

Según la fórmula (1), tenemos:[1]

$$B^{-1} = (A + \alpha e_i e_j^T)^{-1} = A^{-1} - \alpha \frac{A^{-1} e_i e_j^T A^{-1}}{1 + \alpha e_j^T A^{-1} e_i} = A^{-1} - \alpha \frac{[A^{-1}]_{*i}[A^{-1}]_{j*}}{1 + [A^{-1}]_{ji}}.$$

A modo de ejemplo, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

y la actualizamos la matriz A añadiendo 1 a la componente a_{21}. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = A + e_2 e_1^T.$$

Aplicando la fórmula (1) tenemos

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{[A^{-1}]_{*2}[A^{-1}]_{1*}}{1 + [A^{-1}]_{12}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}}{1 - 2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Construya un función de Matlab que tome una matriz |A|, su inversa |Ainv|, unas coordenadas |i|, |j| y un valor |alpha| que se añade a la componente a_{ij} y calcule la inversa mediante la fórmula de Sherman-Morrison:

  ```
  function Inv = InversaShermanMorrison(A, Ainv, i, j, alpha)
      ...
  end
  ```

  Compruebe que la función es correcta comparando con el valor devuelto por la función `inv` de Matlab.

- Evalúe el comportamiento de la función |InversaShermanMorrison| frente a la función |inv| para distintos valores de n. La función puede construir una matriz A aleatoria de $n \times n$, calcular su inversa mediante la función |inv|, perturbar la matriz A y evaluar el tiempo que tarda en calcular A^{-1} tanto con |inv| como con |InversaShermanMorrison|. Para calcular los tiempos tardados por ambos métodos puede utilizar la función |now| y devolver en |ratio| el cociente del tiempo tardado por los dos métodos.

  ```
  function ratio = EvaluaInversaShermanMorrison(n)
      ...
  end
  ```

- Construya una función que tome tres matrices |A|, |Ainv| y |B| y calcule la inversa de |B| mediante la aplicación sucesiva (viendo en qué componentes difieren las matrices |A| y |B|) de la fórmula de Sherman-Morrison.

  ```
  function Inv = InversaShermanMorrisonSucesivo(A, Ainv, B)
      ...
  end
  ```

[1] La notación $[A]_{ij}$ representa la componente i, j de A; $[A]_{i*}$ representa la fila i-ésima de A, y $[A]_{*j}$ representa la columna j-ésima de A.