Lab: Grupo de permutaciones, representación matricial y autovalores
Tratamiento de señales

Dado una tupla con n elementos, una permutación es una reordenación de la tupla. Por ejemplo, la permutación que convierte a la tupla $[1, 2, 3, 4, 5]$ en la tupla $[2, 1, 4, 5, 3]$. Hay $n!$ permutaciones posibles de n elementos. Podemos escribir una misma permutación de estas tres formas distintas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1\ 2)(3\ 4\ 5) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la matriz de bloques, el primero tiene determinante -1 y el segundo 1. La traza del ambos bloques es 0. Los autovalores del primero bloque son ± 1 y los del segundo $\{1, \exp(\pm i2\pi/3)\}$.

- Hacer una función que construya las $n!$ matrices de permutación y calcule los autovalores de cada una representándolos en el plano complejo. Hacer pruebas con distintos valores de n.

```
function DibujaAutovaloresMatricesPermutacion(n)
    ...
end
```

- El Teorema de Gershgorin establece que dada una matriz $A \in C^{n \times n}$ cuadrada, todos sus autovalores están dentro de al menos uno de los n círculos con centro en los elementos de la diagonal de A y cuyos radios son la suma de los valores absolutos de los elementos no diagonales de la fila correspondiente; es decir, existen n círculos con centro a_{ii} y con radios $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

  Hacer una función que construya al azar una matriz de permutación de n elementos y dibuje sus circulos de Gershgorin y sus autovalores, para comprobar que se verifica el teorema de Gershgorin. Hacer pruebas con distintos valores de n.

```
function DibujaCirculosGershgorinMatrizPermutacion(n)
    ...
end
```

- Las permutaciones de n elementos constituyen un grupo multiplicativo. Comprobar mediante la representación matricial que efectivamente son un grupo y ver si es conmutativo. Hacer pruebas con distintos valores de n.

```
function EsConmutativoElGrupoDePermutacion(n)
    ...
end
```

- Se define el centro de un grupo como el subconjunto de elementos del grupo que conmutan con todos los elementos del grupo (se puede demostrar fácilmente que el centro es un subgrupo). Un grupo conmutativo es aquel en que el centro es todo el grupo. Construir una función que calcule el centro del grupo de permutación de n elementos.[1] Hacer pruebas con distintos valores de n.

```
function CalculaCentroGrupoPermutacion(n)
    ...
end
```

[1] Puede demostrarse que los centros de los grupos matriciales son las matrices diagonales constantes.