Nombre: _____ jueves 12 de marzo de 2020

Prueba de evaluación continua II, tratamiento de señales, grado ingeniería tecnologías telecomunicación, UC

Tiempo disponible: 20 minutos, no utilice ningún material adicional.

Este examen es de tipo test. Responda únicamente 'V' o 'F' en función de que la afirmación que se hace subrayada sea verdadera o falsa respectivamente (si alguna pregunta no se respondiera según este criterio —se proporciona más de una respuesta, explicaciones, etc— se consideraría como no respondida).

1. Los autovalores de las matrices hermíticas son siempre reales y los de las anti hermíticas son siempre imaginarios puros.
2. Para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, si los autovalores de AA^* son reales los de A^*A son imaginarios puros y viceversa.
3. La condición para que una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tenga SVD es que todos sus autovalores tengan la misma multiplicidad geométrica que algebraica.
4. La SVD de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es la mejor aproximación de A por una matriz de rango 1.
5. Los valores singulares de toda matriz A son escalares no negativos y constituyen una base $C(A)$ y $C(A^T)$.
6. El conjunto de las señales periódicas de periodo N es una espacio vectorial de dimensión N y existen únicamente dos bases distintas para dicho espacio vectorial: la base de los peines y la de las exponenciales complejas.
7. La matriz de Fourier cuando $N > 1$ nunca tiene todas sus componentes reales.
8. Las columnas de la matriz de Fourier son ortogonales, pero las de la matriz inversa de Fourier no.
9. Consideremos el experimento de tirar un dado estándar de seis caras y observar si el número obtenido es menor que 3 o no. Sea x la variable aleatoria que asigna 0 al resultado "el número obtenido es menor que 3" y asigna 1 al resultado "el número obtenido no es menor que 3". Entonces, $E[x] = 0{,}5$.
10. Sean Ω un conjunto discreto finito arbitrario, A el espacio vectorial de las variables aleatorias de media 0 definidas sobre Ω, y B el espacio vectorial de las variables aleatorias constantes definidas sobre Ω. Entonces, siempre se verifica que $\dim(A) > \dim(B)$.

Soluciones:

1. Verdadero: si $\lambda = a + ib$ es un autovalor de A, verificará $Ax = \lambda x$. Multiplicando, como se hace en la lección 22, por x^* tenemos: $x^*Ax = \lambda x^*x = \lambda\|x\|^2$. Si calculamos la hermítica de esta expresión, teniendo en cuanta que la norma siempre es real, tenemos: $(x^*Ax)^* = x^*A^*x = \lambda^*\|x\|^2$. Hemos llegado por tanto a estas dos expresiones:

$$\begin{cases} x^*Ax &= \lambda\|x\|^2, \\ x^*A^*x &= \lambda^*\|x\|^2. \end{cases}$$

   Si A es hermítica, entonces $A = A^*$ y por lo tanto $\lambda = \lambda^*$; es decir $a + ib = a - ib$, con lo que $b = -b \Rightarrow b = 0$ y λ es real. Si A es antihermítica, entonces $A = -A^*$ y por lo tanto $\lambda = -\lambda^*$; es decir $a + ib = -a + ib$, con lo que $a = -a \Rightarrow a = 0$ y λ es imaginario puro.

2. Falso: tal y como se ve en la lección 24, tanto AA^* como A^*A son matrices hermíticas y, por lo tanto, sus autovalores son reales (de hecho AA^* y A^*A son las dos matrices que podemos utilizar para calcular la SVD de A).

3. Falso: tal y como demuestra la construcción de la lección 25, toda matriz A tiene SVD. La condición que se enuncia en la pregunta es la que se tiene que cumplir para que A tenga descomposición espectral.

4. Falso: tal y como se construye en la lección 25, hay una igualdad entre la matriz y su SVD, $A = U\Sigma V^*$. Tal y como se describe en la lección 27, la SVD puede interpretarse como una suma de matrices de rango 1 (en particular, la aproximación de rango 1 se obtiene haciendo cero todos los valores singulares de Σ excepto el primero).

5. Falso: tal y como se ve en la lección 25, los valores singulares son efectivamente escalares no negativos, pero no pueden constituir una base de los espacios de columnas o filas de A porque no son vectores, sino escalares.

6. Falso: tal y como se ve en la lección 30, el conjunto es efectivamente un espacio vectorial y las bases descritas son efectivamente bases de dicho espacio, pero no son las únicas posibles. Como en cualquier espacio vectorial con una base distinta del conjunto vacío, si tenemos una base podemos construir infinitas bases más mediante combinaciones lineales apropiadas de los vectores de cualquiera de las bases existentes.

7. Falso: tal y como se ve en la lección 31, la matriz de Fourier es una matriz cuadrada $N \times N$ y su componente (i, j) es $w^{(i-1)(j-1)}$, donde $w = e^{i\omega_0}$ y $\omega_0 = 2\pi/N$. Así, en el caso más sencillo con $N > 1$, es decir $N = 2$ tenemos $\omega_0 = \pi$ y $w = -1$; con lo que la matriz de Fourier tiene todas sus componentes reales (en particular, todas son ± 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Falso: tal y como se ve en la lección 31, la matriz que hace la inversa de la transformada de Fourier es, salvo el factor de escala N, la hermítica de la que hace la transformada de Fourier, verificando además que $SS^* = NI$ con lo que las columnas de ambas matrices son orgogonales (aunque no ortonormales).

9. Falso: tal y como se ve en la lección 32, $E[x] = \sum_\omega x(\omega)p(\omega)$. En el caso que nos ocupa, sólo hay dos resultados posibles: sale un valor menor que 3 (es decir, 1 o 2, que tiene una probabilidad 2/6) o sale un resultado no menor que 3 (es decir, $3, 4, 5$ o 6, que tiene una probabilidad 4/6). La variable aleatoria toma el valor 0 en el primer caso y 1 en el segundo con lo que $E[x] = 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3 = 2/3 \neq 0{,}5$.

10. Falso: tal y como se ve en la lección 32, el espacio de las variables aleatorias definidas sobre un conjunto Ω finito de $|\Omega| = n$ elementos tiene dimensión n. Por otra parte, este espacio se puede ver como la suma directa de dos subespacios: el denominado B en el ejercicio de variables aleatorias constantes (que siempre tiene dimensión 1, ya que todas las variables aleatorias que pertenecen a él son múltiplos de la variable aleatoria constante de valor 1) y el subespacio de variables aleatorias de media 0 (denominado A en el ejercicio) que es un hiperplano de dimensión $n-1$ (ya que sólo se impone una restricción —que la suma valga 0— en un espacio ambiente de dimensión n). Por lo tanto $\dim(B) = 1$ y $\dim(A) = n - 1$. Por lo tanto, la condición enunciada ($\dim(A) > \dim(B)$) no se verifica en todo caso, sino sólo cuando $n > 2$.