1: Buscamos un anillo $(A, +, \cdot)$ no unitario. Para ello, $(A, +)$ debe ser grupo conmutativo, debe verificarse la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma. Como tenemos que ser capaces de multiplicar matrices, las matrices deben ser cuadradas. El caso más sencillo será el de matrices 2×2. Existen infinidad de ejemplos, pero vamos a proponer uno

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a = \in \mathbb{R} \right\},$$

y demostrar que cumple los diez requisitos para que sea un anillo no unitario:

I) A es no vacío: por ejemplo, la matriz nula se obtiene haciendo $a = 0$, por lo que al menos una matriz pertenece a A, con lo que $A \neq \emptyset$.

II) $+$ es cerrado para la suma: la suma de dos matrices genéricas de A pertenece a A, ya que

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{bmatrix},$$

que tiene todas sus componentes iguales.

III) $+$ es asociativa, ya que la suma de matrices siempre es asociativa.

IV) existe un neutro para la suma y pertenece a A, ya que la matriz nula se obtiene haciendo $a = 0$ y

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix},$$

V) todo elemento de A tiene inverso aditivo en a, ya que

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix} \in A,$$

por tener todas sus componentes constantes.

VI) $+$ es conmutativa, porque la suma de matrices siempre es conmutativa.

VII) el producto es cerrado porque para dos matrices de A arbitrarias se verifica:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{bmatrix} \in A,$$

por tener la matriz producto todas sus componentes iguales.

VIII) el producto es asociativo, porque el producto de matrices siempre lo es.

IX) el producto es distributivo con respecto a la suma, porque siempre lo es para las matrices.

X) la identidad para el producto, I, por pertenece a A, porque no tiene todas las componentes iguales.

2: Sea el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

y $S^* \doteq S \setminus 0$; es decir, todas las matrices de S menos la nula. Hay que demostrar si $(S^*, \cdot)$ verifica o no cada una de las propiedades de grupo conmutativo. Observemos que las matrices de S tienen las componentes de la diagonal principal complejas conjugadas y las de la antidiagonal verifican que una es la menos compleja conjugada de la otra:

I) $S*$ es no vacío, ya que hay matrices en S^*: por ejemplo, la matriz $I \in S^*$, ya que I se obtiene haciendo $\alpha = 1$ y $\beta = \gamma = \delta = 0$.

II) El producto es cerrado en S^*, ya que si multiplicamos dos matrices genéricas de S^*, obtenemos otra matriz de S^*:

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z' & w' \\ -\overline{w'} & \overline{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zz' - w\overline{w'} & zw' + \overline{z'}w \\ -\overline{z}\overline{w'} - z'\overline{w} & \overline{z}\overline{z'} - \overline{w}w' \end{bmatrix},$$

esta última matriz es de S^* porque las componentes de la diagonal principal son complejas conjugadas y las de la antidiagonal son una la menos conjugada de la otra.

III) El producto es asociativo en S^*, porque lo es para todas las matrices cuadradas.

IV) El neutro I pertenece a S^*, como hemos indicado en el primer punto.

V) Para toda matriz de $A \in S^*$ existe su inverso, ya que su determinante es $|z|^2 + |w|^2 = 0$, y la única posibilidad de que valiera 0 sería que $z = w = 0$, pero esa sería sólo para la matriz nula y $0 \notin S^*$. Una vez que sabemos que existe la inversa, hay que ver si $A^{-1} \in S^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{bmatrix} \in S^*,$$

que efectivamente es de S^* ya que se verifican las relaciones indicadas entre las componentes.

VI) El producto es no conmutativo, ya que si nos fijamos en la ecuación del producto de matrices que tenemos más arriba, vemos que para que fueran conmutativa, deberían ser intercambiables los papeles de las variables con y sin prima. Así por ejemplo, fijándonos en la primera componente se debería verificar: $zz' - w\overline{w'} = z'z - w'\overline{w}$; es decir, que debería verificarse que $w\overline{w'} = w'\overline{w}$, lo que no es verdad en general; por ejemplo no se verifica si $w = 1$, $w' = i$.

3: Sea el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observemos que las matrices de S tienen las componentes de la diagonal principal complejas conjugadas y las de la antidiagonal verifican que una es la menos compleja conjugada de la otra.

En primer lugar, hay que demostrar que S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Para ello hay que demostrar las siguientes propiedades:

I) S es no vacío: efectivamente, la matriz nula pertenece a S porque se obtiene haciendo $z = w = 0$.

II) la suma es cerrada en S porque

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z' & w' \\ -\overline{w'} & \overline{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z + z' & w + w' \\ -\overline{w} - \overline{w'} & \overline{z} + \overline{z'} \end{bmatrix} \in S,$$

que pertenece a S porque se verifican las relaciones conjugadas entre sus componentes cruzadas.

III) la suma es asociativa, porque lo es para todas las matrices.

IV) el neutro par la suma está en S como se indica en el primer punto.

V) todo elemento de S tiene inverso aditivo en S, ya que

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & -w \\ \overline{w} & -\overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la segunda matriz también verifica las relaciones conjugadas entre sus componentes cruzadas.

VI) La suma es conmutativa porque lo es para todo matriz.

VII) el producto de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por una matriz de S pertenece a S porque

$$\alpha \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha z & \alpha w \\ -\alpha \overline{w} & \alpha \overline{z} \end{bmatrix} \in S,$$

porque verifica las relaciones conjugadas entre sus componentes cruzadas.

VIII) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para toda matriz de $A \in S$ se verifica $a(bA) = (ab)A$, porque se verifica para todas las matrices complejas.

IX) Para toda matriz $A \in S$, se verifica $1A = A$, ya que se verifica para toda matriz compleja.

X) Para todo $\alpha in \mathbb{R}$ y para todas $A, B \in S$ se verifica $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, porque se verifica para todas las matrices complejas.

XI) Para todos $\alpha, \beta in \mathbb{R}$ y para toda $A \in S$ se verifica $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, porque se verifica para toda matriz compleja.

Para proponer una base, nos fijamos en que toda matriz de S puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \doteq \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 + \delta B_4.$$

Por construcción, $\mathcal{B} \doteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ es un sistema generador, pues toda matriz de S puede ponerse como combinación lineal de estas cuatro matrices. Para demostrar que además $\mathcal{B}$ es una base, falta únicamente demostrar que sus elementos son linealmente independientes. Para ello, si suponemos una combinación lineal y la igualamos a cero,

$$\alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 + \delta B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtenemos que necesariamente $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, con lo que son linealmente independientes. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base.

Por último, vamos a demostrar que S no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Para ello, bastará con que no verifique alguna de las once propiedades anteriores. En particular, no se verifica la séptima, porque si $\alpha \in \mathbb{C}$, no será cierto que $\alpha z = \overline{\alpha \overline{z}}$.

4: Sea el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

En mi caso, la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} 1+5i & 1+9i \\ -1+9i & 1-5i \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular el ángulo entre A e I porque ambas pertenecen al mismo espacio de Hilbert (bien el de las matrices complejas o bien el conjunto S, porque $I \in S$). En cualquiera de dichos espacios de Hilbert está definido el producto escalar $\langle A, B \rangle \doteq \text{traza}(A^*B)$, con lo que podremos calcular el ángulo α entre las matrices A e I utilizando

$$\cos \alpha = \frac{\langle A, I \rangle}{\sqrt{\langle A, A \rangle}\sqrt{\langle I, I \rangle}}.$$

Los productos internos que necesitamos son, $\langle A, I \rangle = \text{traza}\, A^* = 2$, $\langle I, I \rangle = \text{traza}\, I = 2$

$$\langle A, A \rangle = \text{traza}(A^*A) = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 2(1 + 25 + 1 + 81).$$

Para buscar una matriz $0 \neq B \in S$ tal que $A \perp B$, tenemos que buscar que $\langle A, B \rangle = \text{traza}(A^*B) = 0$. Para ello, puesto que buscamos una matriz de S, imponemos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{traza}(A^*B) \\ &= (1-5i)(\alpha + \beta i) - (1+9i)(-\gamma + \delta i) \\ &+ (1-9i)(\gamma + \delta i) + (1+5i)(\alpha - \beta i) \\ &= 2(\alpha + 5\beta + \gamma + 9\delta). \end{aligned}$$

Cualquier combinación de parámetros, no todos ellos nulos, que satisfagan esta ecuación valdrían. Si hago por ejemplo que B sea real, impongo $\beta = \delta = 0$, con lo que tendremos $\gamma = -\alpha$. Con lo que la solución más sencilla sería

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5: Queremos en primer lugar calcular los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix}.$$

Para ello resolvemos la ecuación característica $0 = |A - \lambda I|$:

$$0 = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

obteniendo

$$\lambda = \alpha \pm i\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

A continuación hay que calcular los vectores propios. Podemos calcular los dos a la vez utilizando el $\pm$. Para ello calculamos el espacio nulo $N(A - \lambda I)$:

$$\begin{bmatrix} i(\beta \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}) & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & i(\beta \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las dos ecuaciones son la misma y por lo tanto la ecuación que deben verificar las componentes de los vectores propios es:

$$i(\beta \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2})x_1 + (\gamma + \delta i)x_2 = 0.$$

No podemos dividir y despejar x_1 o x_2 porque no podemos asegurar que el denominador no valga 0.

Por último, observemos que los autovalores son complejos conjugados, luego los dos tienen el mismo módulo. Con lo que el conjunto de matrices pedido es el conjunto vacío.