L20. Problema de autovalores: $Ax = \lambda x$

- Como $Ax = \lambda x$, la matriz ha de ser cuadrada: $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$.
- Como $x = 0$ siempre es solución ($A0 = 0 = \lambda 0$), buscamos soluciones $x \neq 0$.
- ¿Cómo encontrar λ y $x \neq 0$ tales que $Ax = \lambda x$?

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow 0 \neq x \in N(A - \lambda I) \Rightarrow$$

$$\dim(N(A - \lambda I)) \geqslant 1 \Rightarrow \dim(R(A - I)) < n \Rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{(eq. polinómica cuyas soluciones son } \lambda_i\text{)}.$$

- Cuatro fórmulas útiles:[37]

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda,$$

$$\sum \lambda_i = \operatorname{tr}(A),$$

$$\prod \lambda_i = \det A,$$

$$x \in N(A - \lambda I).$$

[37] En la lección $A = S\Lambda S^{-1}$ deduciremos $\sum \lambda_i$, $\prod \lambda_i$.

L20. Problema de autovalores: $Ax = \lambda x$

Ej. para ilustrar: espectro, span de un eigv, multiplicidades, diagonalizacion, eig de A^n, eig de idempotentes.

- $B = [3, 1; 1, 3] \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 \Rightarrow x = [1; \pm 1]^T$.
- Diagonal $D = [3, 0; 0, 3] \Rightarrow \lambda = 3, \forall x \in \mathbb{R}^3$.
- Triangular $T = [3, 1; 0, 3] \Rightarrow \lambda = 3, x = [1; 0]$ (sólo 1).
- $I \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \lambda = 1, \forall x \in \mathbb{R}^3$, puedo escoger 3 ortonormales.
- Proyección sobre un plano (2 eigv $\in$ plano y 1 $\perp$ con $\lambda = 0$).
- Permutación $A = [0, 1; 1, 0] : [\pm 1, 1]$ con $\lambda = \pm 1$.
- Reflexión $R = [1, 0; 0, -1] \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1, x_1 = [1; 0], x_2 = [0; 1]$.
- Rotación $[c, -s; s, c], Q = [0, -1; 1, 0] : 0 = \lambda_1 + \lambda_2, 1 = \lambda_1 \lambda_2$. $\det(Q - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

L21. Descomposición espectral: $A = S\Lambda S^{-1}$

- Estudiamos cuatro casos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Sea S la matriz cuyas columnas son los eigv de A:

$$\begin{aligned} A[x_1, x_2, \ldots, x_n] &= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n] \\ &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow \\ AS &= S\Lambda. \end{aligned}$$

- Si n eigv l.i. $\Rightarrow S$ rango completo $\Rightarrow \exists S^{-1} \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1}$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B), \det(A^{-1}) = \det^{-1}(A)$.
- $\Rightarrow \det(A) = \det(S)\det(\Lambda)\det(S^{-1}) = \det(\Lambda) = \prod_i \lambda_i$.
- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.[38]
- $\Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(S\Lambda S^{-1}) = \mathrm{tr}(\Lambda S^{-1}S) = \mathrm{tr}(\Lambda) = \sum_i \lambda_i$.

[38] $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m} \Rightarrow \mathrm{tr}(AB) = A(:)'B(:) = B(:)'A(:) = \mathrm{tr}(BA)$ (norma Frob) y $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$

L22. eig de matrices hermíticas $A = A^*$

i) Los autovalores son reales:

- Multiplicando $Ax = \lambda x$ por x^*:

$$x^* A x = \lambda x^* x = \lambda \|x\|^2.$$

- Calculando la hermítica y teniendo en cuenta $A^* = A$:

$$\lambda^* \|x\|^2 = x^* A^* x = x^* A x.$$

- Comparando ambas:[39] $\lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Los eigv de eigλ distintos son ortogonales:[40]

- Sean $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ y $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- Hermitica de la 1º eq, $A^* \mapsto A$ y multiplicando por x_2:

$$\lambda_1 x_1^* = x_1^* A^* = x_1^* A \Rightarrow x_1^* A x_2 = \lambda_1 x_1^* x_2$$

- Multiplicando la 2ª eq. por x_1^*: $x_1^* A x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2$.
- Restando: $(\lambda_2 - \lambda_1) x_1^* x_2 = 0 \Rightarrow x_1^T x_2 = 0 : x_1 \perp x_2$.

[39] $A = A^* \Rightarrow \Lambda(A) \in \mathbb{R}, Q = -Q^* \Rightarrow \Lambda(Q) \in i\mathbb{R}$.

[40] $x \perp y \Leftrightarrow 0 = \langle x, y \rangle \doteq x^* y$. La última igualdad sólo en $\mathbb{C}^n$.

L23. eigλ de matrices semidefinidas positivas (SDP)

- Si $A = A^*$, entonces $x^*Ax \in \mathbb{R}$:

$$y \doteq x^*Ax \Rightarrow y^* = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax = y \Rightarrow y \in \mathbb{R}.$$

- La matriz $A = A^*$ es semidefinida positiva si[41] $\forall x, x^*Ax \geqslant 0$.
- Si A es SDP, entonces sus eigλ son no negativos:[42]

$$Ax = \lambda x \Rightarrow 0 \leqslant x^*Ax = x^*(\lambda x) = \lambda x^*x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda \geqslant 0.$$

[41] Ya sabemos que $x^*Ax \in \mathbb{R}$, que está ordenado.

[42] Ya sabíamos de la lección eig de matrices hermíticas que $\lambda \in \mathbb{R}$.

L24. eig de AA^* y de A^*A

- AA^* y A^*A son i) Hermíticas y ii) SDP:
  i) $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$
  ii) $x^*(AA^*)x = (x^*A)(A^*x) = (A^*x)^*(A^*x) = \|A^*x\|^2 \geqslant 0.$
- Por lo tanto sus eigλ son no negativos y sus eigv ortogonales.
- Sea λ un eigλ de AA^* y u su eigv, $(AA^*)u = \lambda u$;
- multiplicando por A^*:

$$A^*(AA^*)u = (A^*A)(A^*u) = \lambda(A^*u),$$

- con lo que λ también es eigλ de A^*A y su eigv es A^*u.
- Análogamente, $(A^*A)v = \lambda v \Rightarrow (AA^*)(Av) = \lambda(Av)$.
- La doble inclusión implica $\Lambda(AA^*) = \Lambda(A^*A)$
- Hay una relación entre las normas de los eigv de AA^* y A^*A:

$$v^*(A^*A)v = \lambda v^*v \Rightarrow (Av)^*(Av) = \lambda v^*v \Rightarrow \|Av\|^2 = \lambda\|v\|^2.$$

L25. SVD

- Como A^*A es hermítica y SDP, sus eig$\lambda \geqslant 0$ y sus eigv son $\perp$.
- Normalizamos los eigv para que sean unitarios: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_i^j$
- Si A^*A tiene r eigλ no nulos:

$$A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

- v_i eigv unitario de $A^*A \Rightarrow Av_i$ eigv de AA^* con $\|Av_i\| = \sigma_i$.
- Por tanto, $u_i \doteq Av_i/\|Av_i\| = Av_i/\sigma_i$ eigv unitario de AA^*.
- v_i y u_i son los vectores singulares de A por la derecha y por la izquierda, respectivamente.
- σ_i son los valores singulares de A.
- Están relacionados mediante r ecuaciones vectoriales:

$$Av_i = \sigma_i u_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

L25. SVD

- Las r ecuaciones vectoriales

$$Av_i = \sigma_i u_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

- Se pueden escribir como una única ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} u_1 & \cdots & u_r \end{array}\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix},$$

- Con lo que obtenemos la descomposición SVD

$$AV = U\Sigma \Rightarrow A = U\Sigma V^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^*.$$

L25. SVD

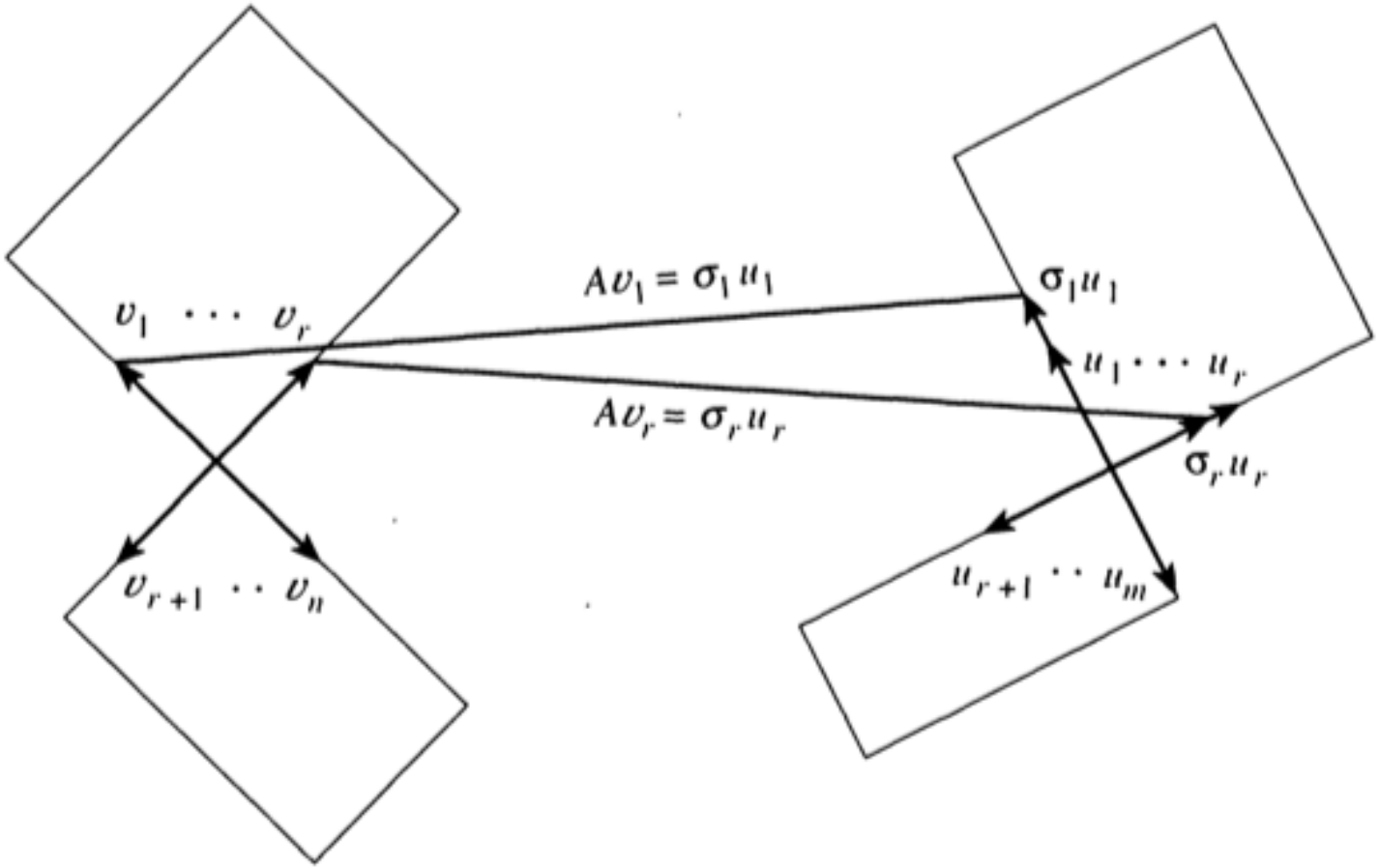


Figure 3. Orthonormal bases that diagonalize A.

L26. Ejemplo SVD

- Dada la matrix A, calculamos A^*A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Encontramos los autovalores de A^*A:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

- Calculamos los vectores propios resolviendo $\mathrm{N}(A^*A - \lambda \mathrm{I})$:

$$0 = (A^*A - 3\mathrm{I})x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$0 = (A^*A - \mathrm{I})x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD

- Calculamos Av_1 y $u_1 = Av_1/\|Av_1\|$:

$$Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}.$$

- Calculamos Av_2 y $u_2 = Av_2/\|Av_2\|$:

$$Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}.$$

- Ya tenemos todo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1\\ 2/\sqrt{3} & 0\\ 1/\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD

- Comprobamos:

$$
\begin{aligned}
U\Sigma V^* &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 \\ 2/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

L26. Ejemplo SVD

- Calcular la SVD de

$$A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & i \end{bmatrix}$$

- En primer lugar, su hermítica es

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

- Lo vamos a hacer de dos formas, partiendo de A^*A y de AA^*:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Recordemos que v son los eigv de A^*A y u los de AA^*.

L26. Ejemplo SVD, a partir de A^*A

- Encontramos los autovalores de A^*A:

$$0 = \det(A^*A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.$$

- Calculamos los vectores propios resolviendo $N(A^*A - \lambda I)$:

$$0 = (A^*A - 3I)x \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$0 = (A^*A - I)x \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$0 = (A^*A)x \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD, a partir de A^*A

- Calculamos Av_1 y $u_1 = Av_1/\|Av_1\|$:

$$Av_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3i}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculamos Av_2 y $u_2 = Av_2/\|Av_2\|$:

$$Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Calculamos Av_3 y $u_3 = Av_3/\|Av_3\|$:

$$Av_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD, a partir de A^*A

- Ya tenemos todo:

$$U = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

- Comprobamos

$$\frac{i}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = A.$$

L26. Ejemplo SVD, a partir de AA^*

- Encontramos los autovalores de AA^*:

$$0 = \det(AA^* - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

- Calculamos los vectores propios u resolviendo $N(AA^* - \lambda I)$:

$$0 = (AA^* - 3I)x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$0 = (AA^* - I)x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD, a partir de AA^*

- Calculamos A^*u_1 y $v_1 = A^*u_1/\|A^*u_1\|$:

$$A^*u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{-i}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculamos A^*u_2 y $v_2 = A^*u_2/\|A^*u_2\|$:

$$A^*u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

L26. Ejemplo SVD, a partir de AA^*

- Ya tenemos todo:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{-i}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

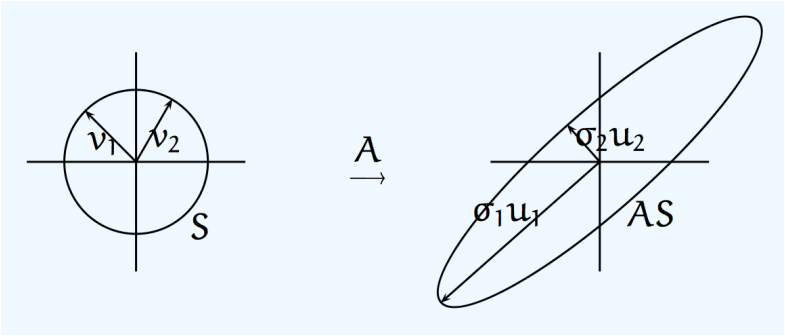
- Comprobamos:

$$U\Sigma V^* = \frac{i}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = A.$$

L27. Propiedades matriciales utilizando la SVD

$$AV = U\Sigma \Rightarrow A = U\Sigma V^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^*.$$

- SVD es la mejor aproximación por $\sum$ de matrices de rango 1.
- Aproxima hiperelipses por hiperelipses de menor dimensión.



i) Rango A es el número de $\sigma_i \neq 0$.

ii) $C(A) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, $N(A) = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$.

iii) $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A\|_F = \sqrt{\sum \sigma_i}$.

iv) $0 \neq \sigma_i(A) = \lambda_i(AA^*) = \lambda_i(A^*A)$.

v) $A = A^* \Rightarrow \sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$.

vi) $A \in \mathbb{C}^{m \times m} \Rightarrow \det(A) = \prod \sigma_i(A)$.

L28. Autovalores y vectores propios de A^k

- Supongamos conocidos los eig de A: $Ax = \lambda x$.
- Sabemos que si $\exists n$ eigv l.i. $\Rightarrow \exists S^{-1} \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1}$.
- A^2: $Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = \lambda^2 x$ $(x \mapsto x, \lambda \mapsto \lambda^2)$. Matricialmente: $A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$.
- $A^k \to 0$ si $\forall \lambda \in \Lambda(A), |\lambda| < 1$.
- A^{-1}: $Ax = \lambda x \Rightarrow x = \lambda A^{-1} x \Rightarrow A^{-1} x = \lambda^{-1} x$ $(x \mapsto x, \lambda \mapsto \lambda^{-1})$. Mat: $A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow A^{-1} = S\Lambda^{-1} S^{-1}$.
- Dado el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, consideramos la matriz $B = p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$:

$$\begin{aligned} Bx &= a_0 Ix + a_1 Ax + \cdots + a_n A^n x \\ &= a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_n \lambda^n x \\ &= p(\lambda) x. \end{aligned}$$

- $\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow p(\lambda) \in \Lambda(p(A))$.

L29. Autovalores y vectores propios de A^*

- Relación entre los eigλ de A y A^*:

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow \\
&0 = \det(A - \lambda I) \Rightarrow \\
&0 = \det^*(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^*) = \det(A^* - \lambda^* I) \Rightarrow \\
&\lambda^* \in \Lambda(A^*).
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, $\Lambda(A^*) = \Lambda^*(A)$.
- Sean $Av_i = \lambda_i v_i$ y $A^* w_j = \lambda_j^* w_j$:

$$v_i^* A^* w_j = \lambda_i^* v_i^* w_j, \quad v_i^* A^* w_j = \lambda_j^* v_i^* w_j \quad \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)^* v_i^* w_j = 0;$$

por lo que $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle v_i, w_j \rangle = 0$.

L30. Historia de dos bases ortonormales

- Sea S el conjunto de señales periódicas de periodo N:

$$S_N \doteq \{x[n] \colon \forall n \in \mathbb{Z}, x[n] = x[n+N]\}.$$

  i) ¿Es S un espacio vectorial?
  ii) ¿Cuál es su dimensión?
  iii) ¿Cuántos grados de libertad tenemos al elegir $x[n]$?

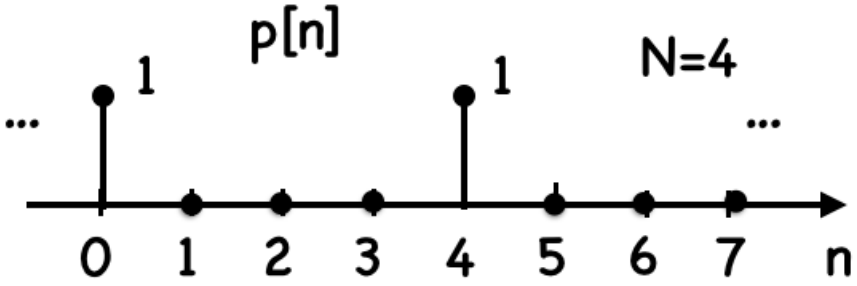
- En este espacio vectorial S definimos el producto interno

$$\langle x[n], y[n] \rangle \doteq \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] y^*[n].$$

L30. Historia de dos bases ortonormales

- Definimos la función peine[43] como un tren de deltas

$$p[n] \doteq \sum_k \delta[n - kN].$$



- Denotamos $p_k[n] \doteq p[n-k]$.
- ¿Los N peines son linealmente independientes?[44]
- $\langle p_k[n], p_m[n] \rangle = \delta_{k,m} \Rightarrow$ forman un conjunto ortonormal.
- Toda señal de periodo N es una combinación lineal de los 4 peines: son una base ortonormal.

[43] ¿Cuántos peines distintos de periodo N existen?

[44] Ver gráficamente y mediante su producto interno.

L30. Historia de dos bases ortonormales

- Consideremos ahora la familia

$$\phi_k[n] \doteq e^{ik2\pi/N}, \quad \text{donde} \quad \omega_0 \doteq 2\pi/N.$$

- Demostrar que son señales periódicas (de periodo N):

$$\phi_k[n] = \phi_k[n+N].$$

- Demostrar[45] que son ortogonales:

$$\langle \phi_k[n], \phi_m[n] \rangle = N\delta_k^m$$

- ¿Cuántas[46] $\phi_k[n]$ distintas hay? Demostrar que:

$$\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n].$$

- Tenemos N señales linealmente independientes en S:[47] son otra base, distinta de la de peines.[48]

[45] Casos $m = k$ y $m \neq k$ con serie.

[46] Antes teníamos N peines distintos

[47] S es el e.v. de las funciones periódicas de periodo N, $\dim S = N$.

[48] La DFT nos dará las ecuaciones de cambio de base.

L30. Historia de dos bases ortonormales

- Por lo tanto, $\forall x[n] \in V$ debe verificarse

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k]\phi_k[n].$$

- Calculando el producto interno

$$\begin{aligned}
\langle x[n], \phi_m[n] \rangle &= \sum_{k=\langle N \rangle} X[k]\langle \phi_k[n], \phi_m[n] \rangle \\
&= \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] N \delta_k^m \\
&= N X[m] \quad \Rightarrow \\
X[m] = \frac{1}{N}\langle x[n], \phi_m[n] \rangle &= X[m+N]
\end{aligned}$$

- Tenemos así las ecuaciones de síntesis y análisis de la DFT

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\omega_0 k n}, \qquad X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\omega_0 k n}$$

L30. Historia de dos bases ortonormales

Resumen:

1. Tenemos un e.v.

$$S_N \doteq \{x[n] \mid x[n] = x[n+N]\}.$$

2. Sobre el que definimos un producto interno:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] y^*[n]$$

3. Tenemos la base ortonormal canónica $p_k[n]$

$$p_k[n] \in S_N, \exists N, \langle p_k[n], p_m[n] \rangle = \delta_k^m,$$

4. y la base ortogonal de las exp. comp. $\phi_k[n]$

$$\phi_k[n] \in S_N, \exists N, \langle \phi_k[n], \phi_m[n] \rangle = N\delta_k^m.$$

L31. La Matriz de Fourier

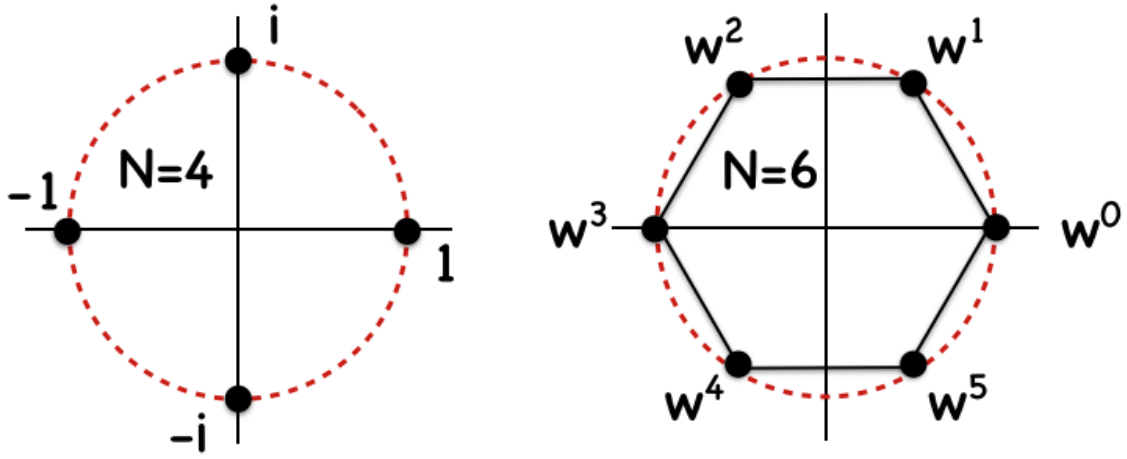
- Las ec. de A. y S. definen un par transformado $x[n] \leftrightarrow X[k]$:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] w^{kn}, \qquad X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w^{-kn},$$

donde

$$w \doteq e^{i\omega_0} \in \mathbb{C}, \qquad \omega_0 \doteq 2\pi/N \in \mathbb{R}.$$

- x y X son N-periódicas: $x[n+N] = x[n]$ y $X[k+N] = X[k]$.
- La razón última es la periodicidad de w: $w^{k+N} = w^k$.
- $w^0, w^1, \ldots, w^{N-1}$ son las raíces N-ésimas de 1: $z^N = 1$.



L31. La Matriz de Fourier

- La ecuación de síntesis para $N = 4$ es

$$\begin{cases} x[0] = X[0]w^0 + X[1]w^0 + X[2]w^0 + X[3]w^0, \\ x[1] = X[0]w^0 + X[1]w^1 + X[2]w^2 + X[3]w^3, \\ x[2] = X[0]w^0 + X[1]w^2 + X[2]w^4 + X[3]w^6, \\ x[3] = X[0]w^0 + X[1]w^3 + X[2]w^6 + X[3]w^9. \end{cases}$$

- Organizando las ecuaciones como vectores

$$x \doteq \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = X[0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + X[1] \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} + X[2] \begin{bmatrix} 1 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{bmatrix} + X[3] \begin{bmatrix} 1 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \doteq SX.$$

L31. La Matriz de Fourier

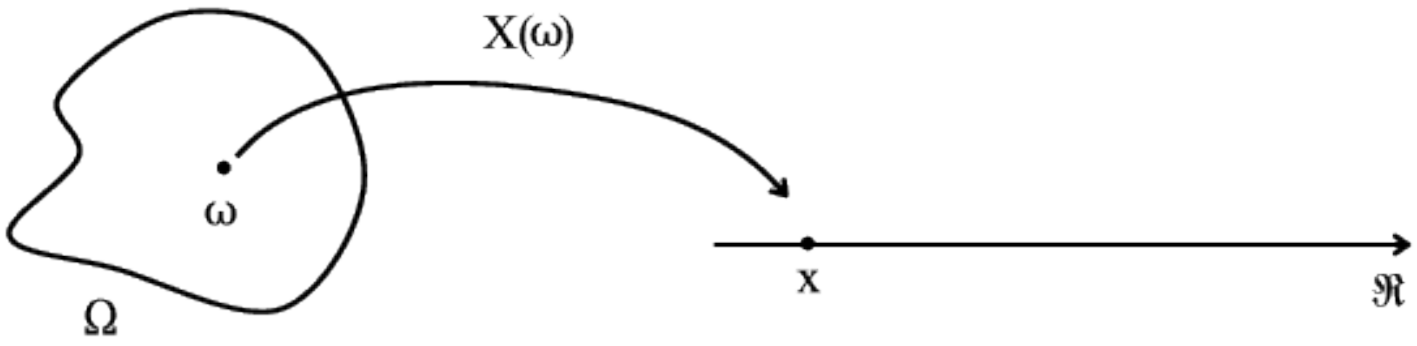
- Las componentes de S son $S_N(i,j) = w^{(i-1)(j-1)}$.
- La periodicidad implica que $w^{k+N} = w^k$.
- La matriz es simétrica $S = S^T$.
- Consideremos el caso $4 \times 4 : w = e^{i\pi/2} = i$. Calcular los productos internos de las columnas.
- Sus columnas son ortogonales:
  $SS^* = N \Rightarrow A \doteq S^{-1} = N^{-1}S^*$.
- Interpretar $x = SX$ y $X = Ax$ como producto interno de filas por vector y como combinación lineal de columnas.

L32. Variables aleatorias

- Un espacio de probabilidad finito es un par (Ω, p), donde Ω es un conjunto finito de cardinalidad $|\Omega| = n$ y $p\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ es una función estrictamente positiva tal que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

- Una variable aleatoria sobre Ω es una función $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$.



- El valor esperado o media de una v.a. x es

$$E[x] \doteq \sum_{\omega} x(\omega)p(\omega).$$

L32. Variables aleatorias

- Un evento en un subconjunto $A \subset \Omega$ y la probabilidad del evento A es
$$p(A) \doteq \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$
- Asociamos a cada evento A una v.a. denominada función indicatriz: $\chi_A \doteq [\omega \in A]$.
- Se verifica $p(A) = E[\chi_A]$.
- El evento complementario del evento A es $A^c \doteq \Omega \setminus A$.

L32. Variables aleatorias

- Denominamos $\mathbb{R}^\Omega$ al conjunto de todas las v.a. sobre Ω.
- ¿Es $\mathbb{R}^\Omega$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? ¿Cuál es su dimensión?
- Podemos representar cada v.a. como una n-tupla (ordenada) $x \equiv (x(\omega_1), \ldots, x(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$
- Sea $S_\mu = \{x \in \mathbb{R}^\Omega \mid E[x] = \mu\} \subset \mathbb{R}^\Omega$, ¿es $S_\mu \prec \mathbb{R}^\Omega$?
- Denotemos x_λ a una v.a. sobre Ω tal que $x(\omega) = \lambda, \forall \omega \in \Omega$.
- Sea $\Lambda = \{x_\lambda \in \mathbb{R}^\Omega\}$ el conjunto de v.a. constantes. ¿$\Lambda \prec \mathbb{R}^\Omega$?
- ¿Cuál es la dimensión de Λ?

L32. Variables aleatorias

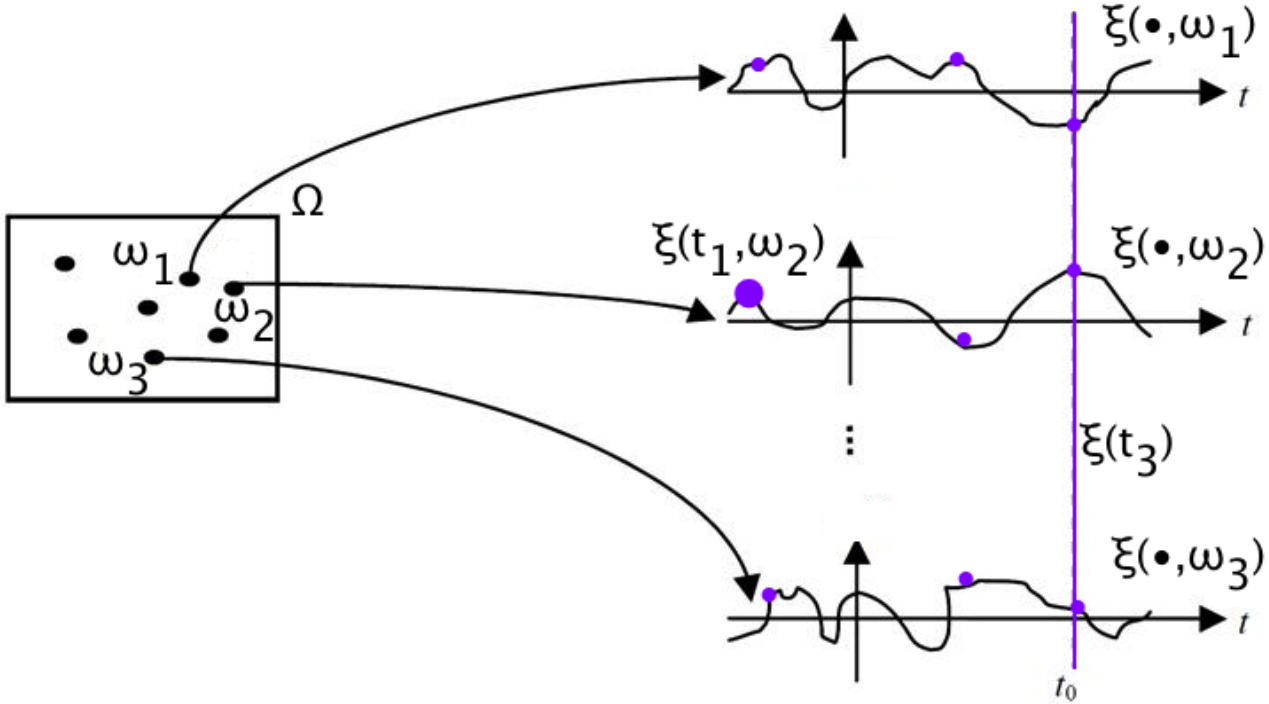
- $E[xy]$ verifica las propiedades de un producto interno:
  1. $E[xy] = \sum_\omega x(\omega)y(\omega)p(\omega) = E[yx]$.
  2. $E[x(y_1 + y_2)] = E[xy_1] + E[xy_2]$
  3. $E[xx] = \sum x^2(\omega)p(\omega) \geqslant 0$ y $E[xx] = 0$ ssi $x(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega$.
- $\langle x, y \rangle \doteq E[xy]$ convierte a $\mathbb{R}^\Omega$ en un espacio de Hilbert.
- $E[x]$ es una función lineal en $\mathbb{R}^\Omega \Rightarrow S_0$ es hiperplano de $\mathbb{R}^\Omega$.
- El complemento ortogonal de S_0 es Λ: $\mathbb{R}^\Omega = S_0 \oplus \Lambda$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^\Omega, \exists s \in S_0, x_\lambda \in \Lambda \mid x = s + x_\lambda$.
- $x \mapsto E[x]$ es la proyección ortogonal sobre Λ y $x \mapsto x - E[x]$ es la proyección ortogonal sobre S_0.
- La norma euclídea de la v.a. x, $\sqrt{E[x^2]}$, se denota $\|x\|_2$.

L32. Variables aleatorias

- La varianza de la v.a. x es $\mathrm{Var}\,(x) \doteq \mathrm{E}[(x - \mathrm{E}[x])^2]$.
- La desviación estándar es $\sigma_x \doteq \sqrt{\mathrm{Var}\ x}$.
- La covarianza de x e y es $\mathrm{Cov}\,(x, y) \doteq \mathrm{E}[(x - \mathrm{E}[x])(y - \mathrm{E}[y])]$.
- El coeficiente de correlación de x e y es

$$\rho_{x,y} \doteq \frac{\mathrm{Cov}\,(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

- Así, si $\mathrm{E}[x] = \mathrm{E}[y] = 0$, entonces la varianza de x es el cuadrado de su norma euclídea, la desviación estándar es su norma euclídea, la covarianza de x e y es su producto interno y el coeficiente de correlación es el coseno del ángulo entre ellas.

L33. Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico indexado por el conjunto finito T y definido sobre (Ω, p) es una función $\xi\colon T \to \mathbb{R}^{\Omega}$.
- Denotamos por $\xi(t, \omega)$ al valor de $\xi(t)$ en ω y denotamos por $\xi(\cdot, \omega)$ a la función $t \mapsto \xi(t, \omega)$.
- Por lo tanto, cada $\xi(t)$ es una v.a.; cada $\xi(t, \omega)$ es un número real; y cada $\xi(\cdot, \omega)$ es una función real sobre T denominada trayectoria o realización del proceso estocástico.