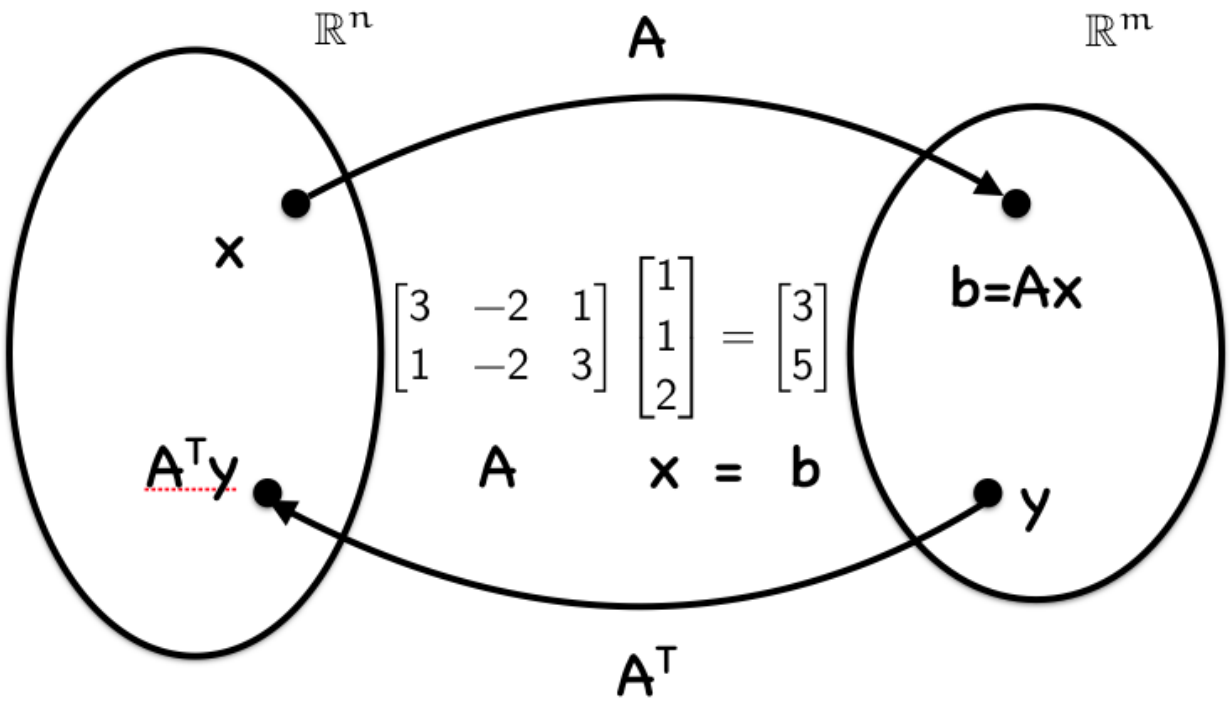
L13. Los 4 subconjuntos asociados a una matriz

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que transforma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; definimos:
  - $C(A) \doteq \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ (espacio de columnas),
  - $N(A) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ (espacio nulo).
  - $C(A^T) \doteq \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ (espacio de filas).
  - $N(A^T) \doteq \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0\} \subset \mathbb{R}^m$ (e. nulo por la izda.).



L14. Los 4 subespacios ortogonales asociados a una matriz

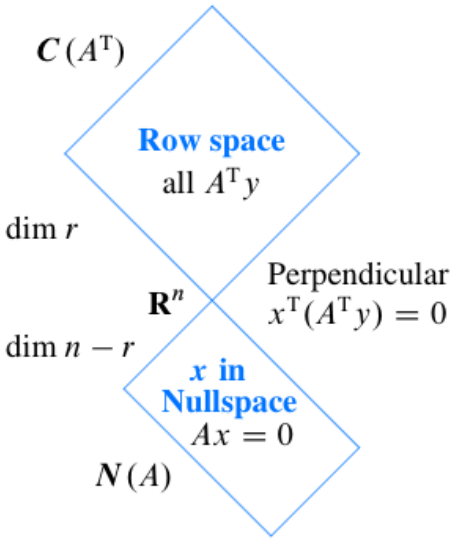
- Los 4 subconjuntos son realmente subespacios vectoriales.

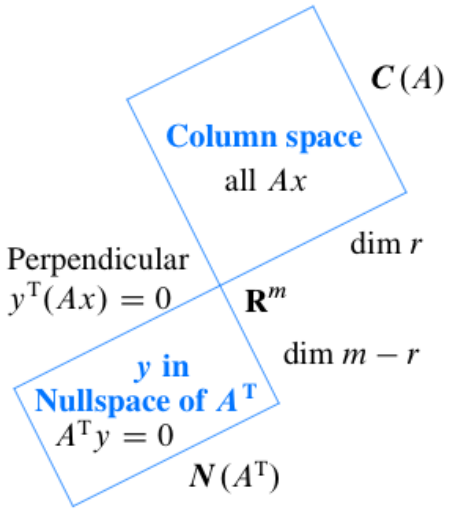
$$C(A) = \{Ax\},\ N(A) = \{x \mid Ax = 0\},\ C(A^T) = \{A^T y\},\ N(A^T) = \{y \mid A^T y = 0\}.$$

- Ortogonales[21] 2 a 2, $N(A) \perp C(A^T)$ (2 dem; idem con A^T):

$$Ax = \begin{bmatrix} \text{fila } 1 \\ \vdots \\ \text{fila } m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{fila } 1)\cdot x = 0, \ldots, (\text{fila } m)\cdot x = 0.$$

$$x \in N(A) \Rightarrow \langle x, A^T y\rangle = x^T(A^T y) = (Ax)^T y = 0^T y = 0.$$





[21] $A \perp B$ s.e.v, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \Rightarrow (\perp)\ 0 = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0$.

L15. Rango de una matriz

- Definición: dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, definimos:[22]
  i) rango por columnas $r_c \doteq \dim(C(A))$ (el nº de columnas l.i.).
  ii) rango por filas $r_f \doteq \dim(C(A^T))$ (el nº de filas l.i.)
- Teorema: $r_c = r_f$, que denominamos el rango de A.
- Demostración:
  - Sea $C \in \mathbb{C}^{m\times r_c}$ una matriz con r_c columnas l.i. de A.
  - Toda columna de A es c.l.[23] de columnas de $C \Rightarrow A = CR$.
  - Dimensionalmente,[24] vemos que $R \in \mathbb{C}^{r_c\times n}$.
  - Toda fila de A es c.l.[25] de las filas de $R \Rightarrow r_f \leqslant r_c$.
  - Haciendo lo mismo[26] para $A^T \Rightarrow r_c \leqslant r_f$.
  - De $\leqslant$ y $\geqslant$, $r_c = r_f \doteq r \doteq \text{rank}(A) \leqslant \text{mín}(m, n)$.[27]

---

[22] Hacer ejemplo A=[1 0 2 1 1; 1 -1 2 0 2; 2 1 4 3 1];
[23] Forma 2 de multiplicar matrices.
[24] $(m \times n) = (m \times r_c)(r_c \times n)$.
[25] Forma 3 de multiplicar matrices y $\text{rank}(AB) \leqslant \text{mín}(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.
[26] $r_c(A) = r_f(A^T)$ y $r_f(A) = r_c(A^T)$.
[27] Si $r = \text{mín}(m, n)$ decimos que A es de rango completo.

L16. Dimensiones de los 4 subespacios

Teorema:

- Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que transforma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se verifica

$$\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n,$$

  donde

$$C(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \prec \mathbb{R}^m,$$
$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \prec \mathbb{R}^n.$$

- Análogamente,

$$\dim(N(A^T)) + \dim(C(A^T)) = \dim(\mathbb{R}^m) = m.$$

- Por lo tanto,[28] $\dim(N(A)) = n - r$ y $\dim(N(A^T)) = m - r$.

[28] Donde $r \doteq \text{rank}(A)$.

L16. Dimensiones de los 4 subespacios

Demostración

- Sea $\{u_1, \ldots, u_q\}$ una base de $N(A)$.
- La extendemos[29] a base de $\mathbb{R}^n$: $\{u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r\}$.
- Como $\dim(N(A)) = q$, hay que demostrar[30] $\dim(C(A)) = r$.
- Como $C(A) = \{Ax\}$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ genérico. Por ser base,

$$x = c_1 u_1 + \cdots + c_q u_q + d_1 v_1 + \cdots + d_r v_r.$$

- $u_i \in N(A) \Rightarrow Au_i = 0 \Rightarrow Ax = d_1 Av_1 + \cdots + d_r Av_r$.[31]
- Para ver que los $\{Av_i\}$ son l.i.

$$\begin{aligned} 0 =& p_1 Av_1 + \cdots + p_r Av_r = A(p_1 v_1 + \cdots + p_r v_r) \Rightarrow \\ & p_1 v_1 + \cdots + p_r v_r \in N(A) \Rightarrow p_1 = \cdots = p_r = 0. \end{aligned}$$

---

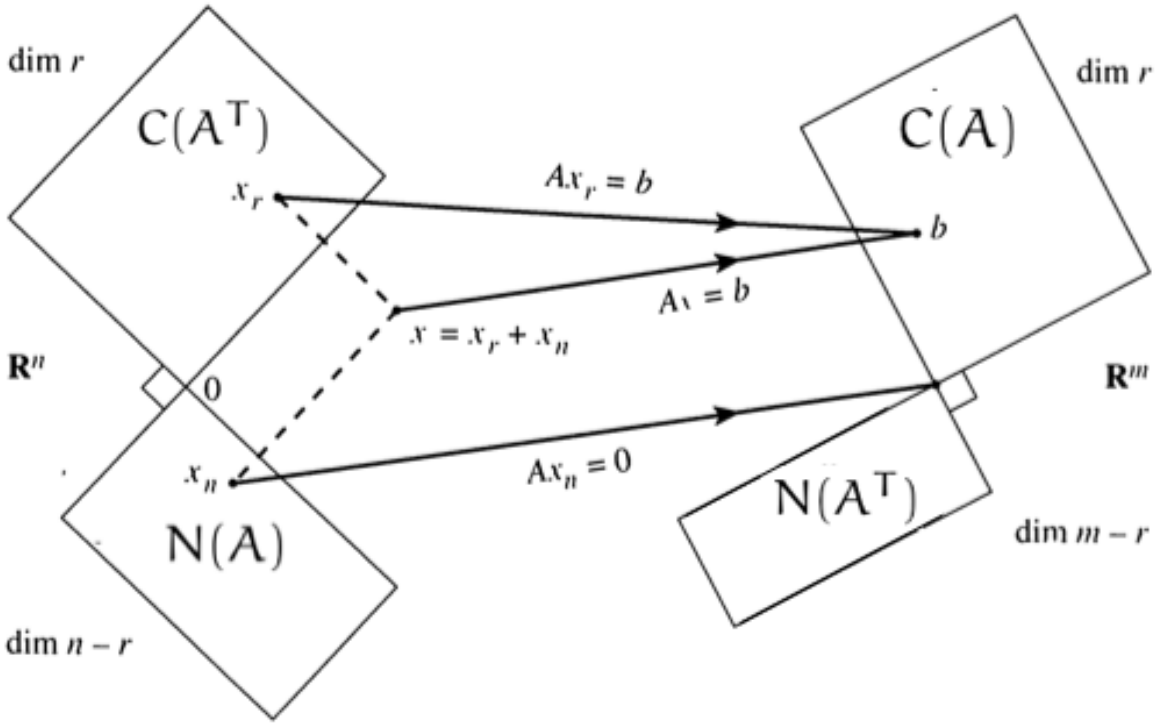
[29] Como $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, se verifica que $q + r = n$ y por tanto $q = n - r$.

[30] De hecho, demostraremos que $\{Av_1, \ldots, Av_r\}$ es base de $C(A)$.

[31] Luego $\{Av_1, \ldots, A_r\}$ es un sistema generador de $C(A)$.

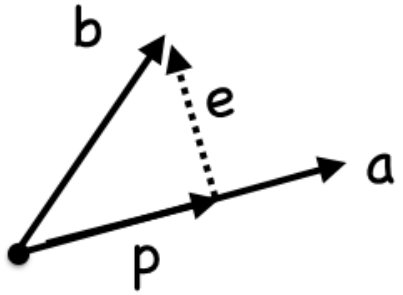
L17. Entendiendo Ax=b y Ax=0 con los 4 subespacios

- Si $Ax = b$, tiene solución, entonces $b \in C(A)$.
- $N(A)$ es el espacio de soluciones de $Ax = 0$.
- $N(A) \perp C(A^T)$ y $\dim(N(A)) + \dim(C(A^T)) = \dim(\mathbb{R}^n)$:[32]
- El efecto de A es $C(A^T) \mapsto C(A)$ y $N(A) \mapsto 0$:



[32] Por tanto, $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T)$, suma directa.

L18. Proyectando sobre una recta a



- Proyectamos b ortogonalmente sobre la dirección de a
- La proyección es p y el error es $e \doteq b - p$.
- p está sobre la recta, es un múltiplo de a: $p = ax, x \in \mathbb{R}$.
- El hecho clave es que $e \perp a \Rightarrow$:[33]

$$0 = a^T e = a^T(b - p) = a^T(b - ax) \Rightarrow x = \frac{a^T b}{a^T a} \Rightarrow p = a\frac{a^T b}{a^T a}$$

- Podemos representarlo mediante una matriz de proyección P:

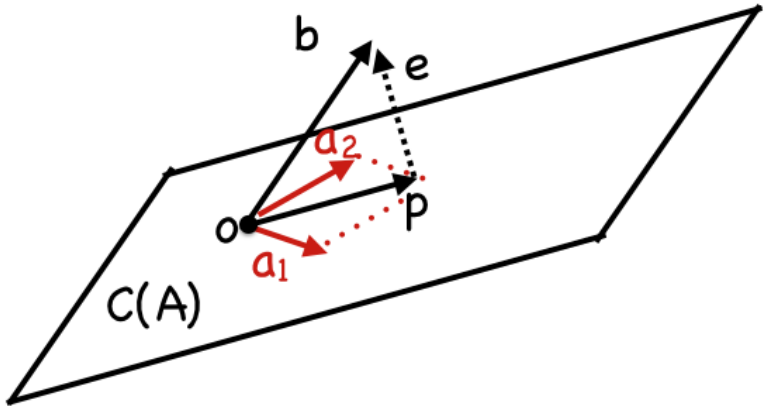
$$p = Pb, \qquad \text{con } P = \frac{aa^T}{a^T a}.$$

- ¿rank(P)?, ¿$C(P)$?, ¿es simétrica?, ¿es idempotente?.[34]

[33] De la ec y el dibujo: si $b \mapsto 2b$, la proyección p también. Si $a \mapsto 2a$, p no.
[34] Estas dos propiedades caracterizan a las matrices de proyección.

L19. Proyectando sobre $C(A)$

- A veces $Ax = b$ no tiene solución ($b \notin C(A)$):
- proyectamos b sobre $C(A)$ y resolvemos $A\hat{x} = p = Pb$. En 2D:



- El plano está definido por a_1, a_2, las columnas de A.
- $p = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2 = A\hat{x}$. Queremos encontrar $\hat{x}$.
- El error es perpendicular al plano:[35] $a_i \perp e = b - p = b - A\hat{x}$.

$$a_i^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow A^TA\hat{x} = A^Tb.$$

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb, \quad p = A(A^TA)^{-1}A^Tb, \quad P = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

- ¿Qué pasaría[36] si "aplico" $(A^TA)^{-1} = A^{-1}A^{-T}$?
- Comprobamos que $P^T = P$ y $P^2 = P$.

[35] LS: $A^TA\hat{x} = A^Tb$, pInv: $A^+ \doteq (A^TA)^{-1}A^T$.

[36] Esto no es posible si A no es cuadrada e invertible ($P = I$).

L19. Proyectando sobre $\mathrm{C}(A)$

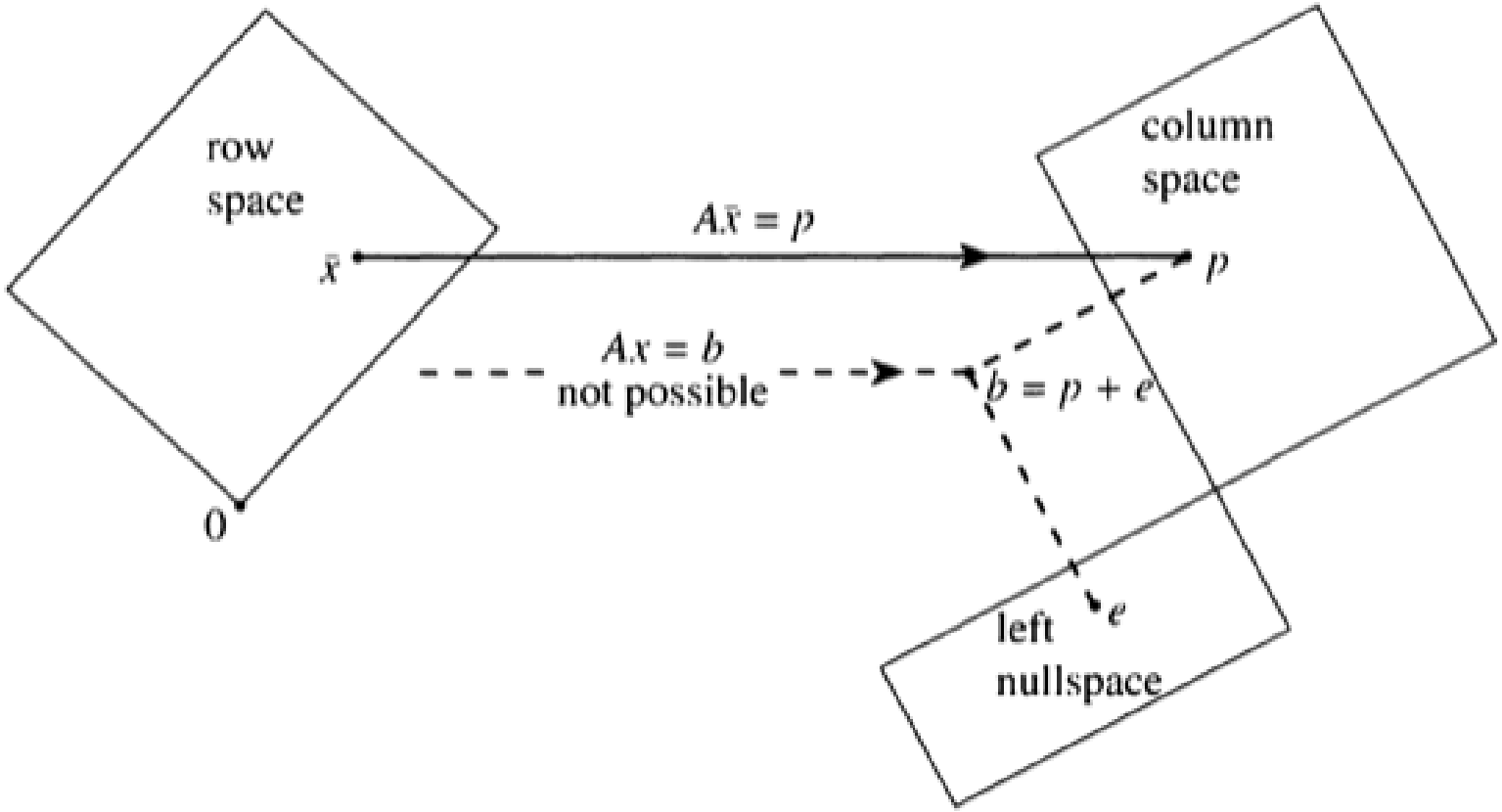


Figure 2. Least squares: $\bar{x}$ minimizes $\|b - Ax\|^2$ by solving $A^T A\bar{x} = A^T b$.

L19. Proyectando sobre $\mathrm{C}(A)$

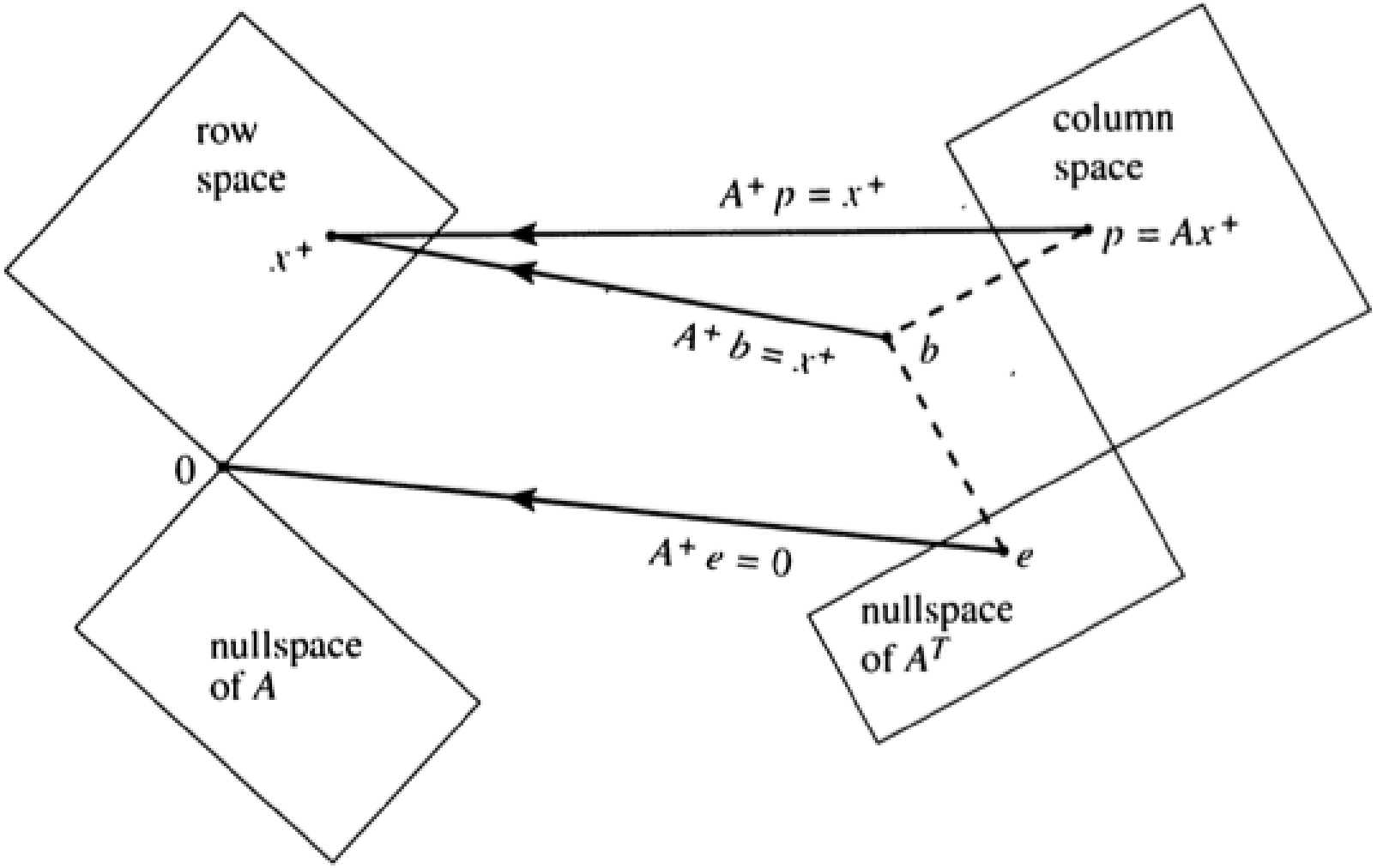


Figure 4. The inverse of A (where possible) is the pseudoinverse A^+.