L1. Estructuras algebraicas: grupos

Un grupo es un par $(G, *)$, donde:

- $G \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío.
- $*$ es una operación binaria[1] $*\colon G \times G \to G$ tal que:[2]
  i) Asociativa
  ii) Elemento identidad (neutro).
  iii) Inverso.

Ejemplos:

- $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$
- $(\{e^{j\theta}\colon \theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$, subgrupo, raíces n-ésimas de 1.
- $(\{0, 1, 2, 3\}, + \pmod 4) \equiv (\mathbb{Z}_4, +)$.
- $(\{1, 2, 3\}, \cdot \pmod 4) \equiv (\mathbb{Z}_4^*, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$.
- $(\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\colon \det(A) \neq 0;\}, \cdot)$. ¿Y si $= 1; = -1;^3 = \pm 1; = 2$?
- Permutaciones de una tupla: $(a, b, c) \to (b, c, a), \ldots$.

[1] Implícitamente, $*$ es cerrada.
[2] No se requiere conmutativa. Si la tiene, es un grupo abeliano.
[3] Dos reflexiones son una rotación.

L2. Estructuras algebraicas: anillos y cuerpos

Anillos

- Un anillo es una terna $(A, +, \cdot)$, donde
  i) $(A, +)$ es un grupo abeliano; denotamos 0 al elemento neutro,
  ii) El producto es asociativo y distributivo con respecto a la suma.
- Si el producto:
  - es conmutativo, tenemos un anillo conmutativo
  - tiene elemento neutro, denotado 1, tenemos un anillo unitario.
- Ejemplos: $\mathbb{Z}$, $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$.

Cuerpos

- Un cuerpo es un anillo conmutativo y unitario en el que todo $x \neq 0$ tiene inverso con respecto al producto.
- Ejemplos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$, ¿$\mathbb{Z}_6$?, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_p$.

L3. Estructuras algebraicas: espacio vectorial

Un espacio vectorial[4] sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un $V \neq \emptyset$:

- sobre el que hay definida una operación interna $+\colon V \times V \to V$ tal que $(u, v) \mapsto u + v$
- y una externa $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$ tal que $(a, v) \mapsto a \cdot v$

$(V, +)$ debe ser grupo conmutativo y $\forall a, b \in \mathbb{K}; \forall u, v \in V$:

i) $a(bu) = (ab)u$;

ii) $1 \in \mathbb{K}$ sea neutro para el producto $1 \cdot u = u$;

iii) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$;

iv) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

Ejemplo: $\mathbb{R}^2$ con las operaciones estándar.

[4] Los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$ escalares.

L4. Base, dimensión y subespacios de un espacio vectorial

- $U \subset V$ es un conjunto de vectores del espacio vectorial V.
- $U \subset V$ es linealmente independiente si[5]

$$\sum_{i=1}^{N} a_i u_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i = 1, \ldots, N.$$

- $U \subset V$ es un sistema generador de V si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de vectores de U.
- Una base de un espacio vectorial es un sistema generador l.i.
- dimensión de $V \doteq$ cardinalidad de sus bases.
- $\emptyset \neq U \subset V$ es un subespacio vectorial de V, $U \prec V$ ssi:
  i) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$;
  ii) $u \in U \Rightarrow au \in U$.

[5] $\{x\}$ no siempre es un conjunto l.i. ya que $\{0\}$ tiene 0 vectores l.i.

L4. Base, dimensión y subespacios de un espacio vectorial

- Ejemplos de espacio vectorial:
  - Todo cuerpo es un e.v. sobre sí mismo;
  - $\mathbb{C}$ es un e.v. de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$;
  - $\mathbb{R}^n$;
  - $\mathbb{R}$ es un e.v. de dimensión ∞ sobre $\mathbb{Q}$;
  - Matrices $m \times n$;
  - El conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$;
  - El conjunto de los polinomios de orden menor o igual que p.
- Ejemplos de subespacio vectorial:
  - $S = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid A = A^T\} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$
  - $L = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid a_{ij} = 0, \forall i < j\} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$
  - ¿Qué subespacio es $S \cap L$?
  - ¿Es $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \text{rank}(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un subespacio?[6]

---

[6] $\text{rank}(A + B) \leqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, $\text{rank}(AB) \leqslant \text{mín}(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$.

L5. Espacios de Hilbert

- Un producto interno (escalar) sobre V (un e.v. sobre $\mathbb{K}$) es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ que verifique:
  i) Definida positiva: $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = 0$;
  ii) Hermítica: $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
  iii) Lineal[7] en la 1ª componente:[8] $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.
- Un e.v. sobre el que se ha definido un p.i. se llama prehilbert.[9]
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:[10] $|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.
- Si $\langle x, y \rangle = 0$, decimos que x, y son ortogonales, $x \perp y$.
- $A, B \subset V$ son ortogonales, $A \perp B$, si $x \perp y, \forall x \in A, y \in B$.
- $A^{\perp} \doteq \{x \in V \mid x \perp y, \forall y \in A\}$: subespacio ortogonal a A.
- $x, y \in \mathbb{C}^n : \langle x, y \rangle \doteq x^* y$; $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} : \langle A, B \rangle \doteq \mathrm{tr}(A^* B)$
- $f, g \in C[a, b] : \langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$
- Pol grado $\leqslant n : x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i < x_{i+1}, \langle p, q \rangle \doteq \sum p(x_i) q(x_i)$.

[7] Hermítica y Lineal 1ª $\Rightarrow$ lineal conjugada en la 2ª componente.
[8] Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el producto interno es simétrico y bilineal.
[9] Si además es completo, se dice que es de Hilbert.
[10] C-S permite introducir el concepto de ángulo entre vectores.

L6. Espacios de Banach

- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ sobre el que se pueda definir un valor absoluto (generalmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
- Una norma sobre V es una aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ tal que:
  i) No degenerada: $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$;
  ii) Homogénea: $\|kx\| = |k|\|x\|$;
  iii) Desigualdad triangular: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- Se dice que V es un espacio vectorial normado.
- Si además es completo, se dice que es un espacio de Banach.
- Todo producto interno induce[11] una norma: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.
- Teorema de Pitágoras: si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Ident. paralelogramo:[12] $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- Identidad de polarización:

$$\langle x, y\rangle \doteq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)).$$

[11] C-S permite comprobar ($\triangle$) que $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es una norma.

[12] No toda $\|\cdot\|$ proviene de un p.i.: $x = [1,1]^T, y = [0,1]^T$ con la $\|\cdot\|_\infty$ y $5 \neq 4$.

L7. Espacios métricos

- Sea M un conjunto, no necesariamente un espacio vectorial.[13]
- Una distancia es una función $d \colon M \times M \to \mathbb{R}^+$ tal que:
  i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$;
  ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
  iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.
- Toda norma permite definir una distancia: $d(x, y) \doteq \|x - y\|$.
- Ejemplos:
  1. Distancia euclídea.
  2. Distancia de las calles de NYC.
  3. Distancia del metro de Londres.[14]
  4. Distancia de Hamming: $d(x, y) \equiv |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$ (número de componentes distintas).
- Esquema de estructuras algebraicas

[13] ¿Por qué no es necesaria la estructura de e.v.?

[14] Relación de equivalencia, clases de equivalencia, conjunto cociente.

L8. Cinco formas de multiplicar matrices

1. Componente a componente:[15]

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha a+\beta b & \alpha c+\beta d\\ \gamma a+\delta b & \gamma c+\delta d\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

[15] Productos escalares de filas por columnas

L8. Cinco formas de multiplicar matrices

2. Combinando columnas:

- Las operaciones sobre un e.v. permiten sumar vectores y multiplicar vectores por escalares:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b \\ \gamma a + \delta b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}.$$

- $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$ es la c.l. de columnas de A que da b:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \gamma a + \delta b & \gamma c + \delta d \end{bmatrix}$$

$$= \left[a \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \quad \Big| \quad c \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \right]$$

L8. Cinco formas de multiplicar matrices

3. Combinando filas:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \gamma a + \delta b & \gamma c + \delta d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix} \\ \gamma \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

L8. Cinco formas de multiplicar matrices

4. Como suma de matrices de rango 1:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \gamma a + \delta b & \gamma c + \delta d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \gamma a & \gamma c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta b & \beta d \\ \delta b & \delta d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix}.$$

L8. Cinco formas de multiplicar matrices

5. Por cajas:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

i) $[-][\,|\,]$;

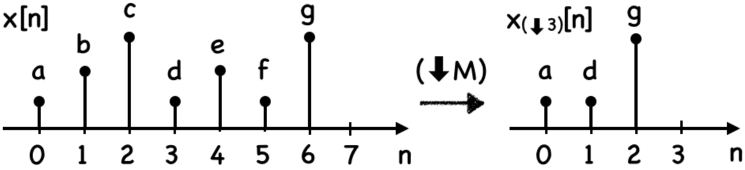
ii) $[\,|\,][+]$;

iii) $[+][-]$;

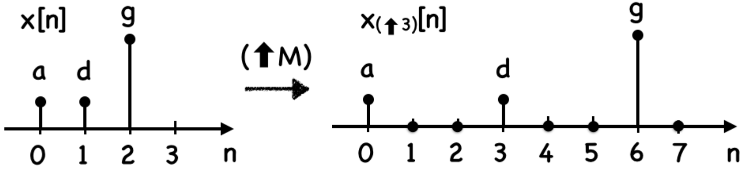
iv) $[\,|\,][-]$.

L9. Diezmado y expansión

- Muestreo: $x[n] \doteq x(nT)$, donde $T = 1/f_s$.
- Diezmado (muestreo de señales discretas): $x_{(\downarrow M)}[n] \doteq x[nM]$.



- Expansión (la operación dual[16]): $x_{(\uparrow L)}[n] \doteq x[n/L][n/L \in \mathbb{Z}]$.



- $(\downarrow M)$ y $(\uparrow M)$ son $\cancel{\text{LTI}} \Rightarrow \nexists H(z) \mid X_{(\downarrow M)}(z) = H(z)X(z)$.
- $(\downarrow M)(\uparrow L) = (\uparrow L)(\downarrow M)$ ssi $\gcd(L, M) = 1$ $((3, 2), (6, 4))$.

[16] $(x_{(\uparrow M)})_{(\downarrow M)}[n] = x[n]$ pero $(x_{(\downarrow M)})_{(\uparrow M)}[n] \neq x[n]$. Expandir siempre es reversible, diezmar tira muestras (información) y puede no serlo.

L10. Matrices de diezmado y expansión

$$
\mathrm{I}x \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = x.
$$

L10. Matrices de diezmado y expansión

$$(\downarrow 2)x \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = x_{(\downarrow 2)}.$$

$$(\uparrow 2)x \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \\ e \\ \vdots \end{bmatrix} = x_{(\uparrow 2)}.$$

$$(\uparrow 2) = (\downarrow 2)^{T},$$

L10. Matrices de diezmado y expansión

$$(\downarrow 2)(\uparrow 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

- En general, $(\downarrow \mathrm{L})(\uparrow \mathrm{L}) = \mathrm{I}$. ¿Es cierto que $(\downarrow \mathrm{L}) = (\uparrow \mathrm{L})^{-1}$?

L10. Matrices de diezmado y expansión

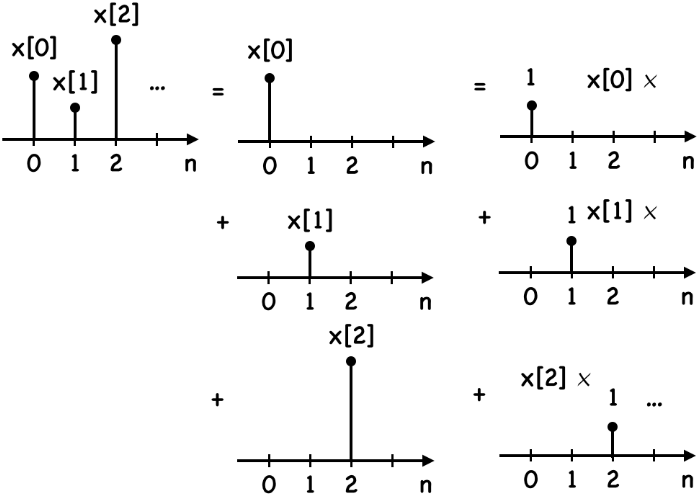
$$
\begin{aligned}
(\uparrow 2)(\downarrow 2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \neq \mathrm{I}
\end{aligned}
$$

- En general, $(\uparrow \mathrm{L})(\downarrow \mathrm{L}) \neq \mathrm{I}$ (son cero $\mathrm{L}-1$ de cada L filas).

L11. Convolución lineal

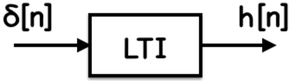
- Toda señal $x[n]$ es una c.l. de deltas desplazadas:

$$x[n] = \sum_k x[k]\delta[n-k].$$



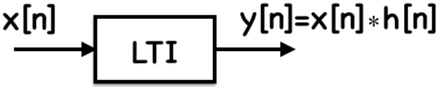
L11. Convolución lineal

- La respuesta al impulso, $h[n]$, de un sistema es su salida cuando su entrada es $\delta[n]$.



- Si entra $x[n]$ a un sistema LTI con r.i. $h[n]$ la salida es[17]

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] \doteq h[n] * x[n].$$



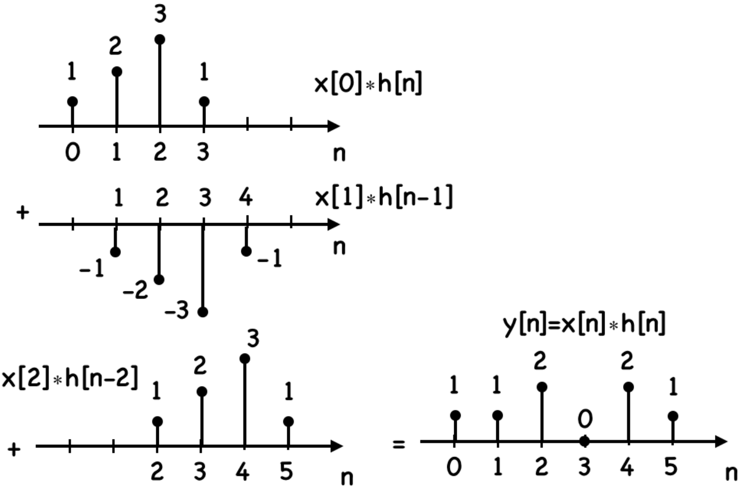
- El producto de convolución $*$ es conmutativo y asociativo.[18]
- $y[n] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(i\omega) = X(i\omega)H(i\omega)$.

[17] Como $x[n] = \sum_k x[k]\delta[n-k]$ y es LTI, $y[n] = \sum_k x[k]h[n-k]$.
[18] ¿Qué interpretación tiene?

L11. Convolución lineal

- Sean $x[n] = [1, -1, 1]$ y $h[n] = [1, 2, 3, 1]$,

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2].$$



L11. Convolución lineal

- Sean $x[n] = [1, -1, 1]$ y $h[n] = [1, 2, 3, 1]$,

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2].$$

- Expresado vectorialmente y después matricialmente:

$$y = 1\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \doteq Hx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- H es una matriz Toeplitz (de diagonales constantes).

L11. Convolución lineal

- Añadimos 0's a h en función de la longitud de x.
- Como el producto de convolución es conmutativo, $Hx = Xh$.
- $*$ se puede interpretar como producto de polinomios:

$$(x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 1) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 1,$$
$$(1 - x + x^2)(1 + 2x + 3x^2 + x^3) = 1 + x + 2x^2 + 2x^4 + x^5.$$

- En Matlab: `H=toeplitz(c,r); y=conv(h,x);`

i) ¿Es H de rango completo?

ii) ¿Son las matrices Toeplitz $m \times n$ un s.e.v. de $\mathbb{R}^{m \times n}$.

iii) ¿Es la suma de sistemas LTI un sistema LTI?

iv) ¿Qué interpretación tiene C(H)?

v) ¿Es todo sistema LTI capaz de generar cualquier salida si escogemos la entrada adecuada?

L12. Convolución circular

- Sean $x[n]$ y $h[n]$ señales periódicas de periodo N.
- La convolución circular se define como

$$x[n] \circledast h[n] \doteq \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \doteq h[n] \circledast x[n].$$

- $x[n] \circledast h[n] \Leftrightarrow X(e^{i\omega})H(e^{i\omega})$.
- Matlab:[19] `y=cconv(x,h,N);` `y=ifft(fft(x).*fft(h));`
- Si $x = [a, b, c, d]^T, h = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]^T$, entonces

$$h \circledast x = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = Hx^T,$$

- La matriz H es circulante[20] (tambien es de Toeplitz).
- Hay que saber cuándo se utiliza $*$ o $\circledast$ (visto en n y en ω).

[19] Si no ponemos N, `cconv` hace 0–padding para dar lo mismo que `conv`.

[20] Se puede construir en Matlab con `H = toeplitz(c,r);`