Nombre: ____ jueves 5 de septiembre de 2019

Tratamiento de señales, grado ingeniería tecnologías telecomunicación, UC

Tiempo disponible: 120 minutos, no utilice ningún material adicional.

Pregunta 1 (**2 puntos**)

I) Sea $Ax = \lambda x$. Demuestre que si A tiene inversa, entonces x es también un vector propio de A^{-1} y calcule cuánto vale su autovalor asociado.

II) Decimos que la matriz A es involutiva si $A = A^{-1}$ o, lo que es lo mismo, si $A^2 = I$. Si A es una matriz involutiva, calcule cuánto pueden valer los autovalores de A.

III) La matriz

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

rota un ángulo de θ radianes en el sentido positivo. Razone o calcule para qué valores de θ es $R(\theta)$ una matriz involutiva.

IV) Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

calcule qué valores pueden tomar los parámetros a, b, c y d para que A sea involutiva.

Pregunta 2 (**2 puntos**) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto de m números complejos. Para cada uno de los valores $m = 0, 1, 2, 3, 4$ encuentre un ejemplo de un grupo $(G, \cdot)$ formado por un subconjunto de $\mathbb{C}$ de m elementos junto con la multiplicación estándar o **demuestre** que no es posible encontrarlo.

Pregunta 3 (**2 puntos**) Para cada uno de los valores $r = 0, 1, 2, 3$, encuentre un ejemplo de una matriz de proyección 3×3 que tenga rango r.

Pregunta 4 (**2 puntos**) Sea $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz de proyección.

I) Razone si P tiene descomposición espectral siempre o depende de la elección concreta de P.

II) Sea P una de las que sí tienen descomposición espectral. Razone si esta descomposición espectral es única o puede haber varias descomposiciones espectrales posibles para P. Una vez concluido el razonamiento, ilustre su razonamiento con un ejemplo (es decir, no se base en un único ejemplo para el razonamiento: haga primero el razonamiento general y luego ponga un ejemplo).

Pregunta 5 (**2 puntos**) Encuentre un ejemplo de una matriz 2×2 que no tenga descomposición espectral. ¿Por qué no la tiene?
