Tratamiento de señales, grado ingeniería tecnologías telecomunicación, UC Tiempo disponible: 90 minutos, no utilice ningún material adicional.

Pregunta 1 (3 puntos) Calcular una matriz A con |A| = -1 y tal que  $[1, 1, 1]^T$  y  $[1, 0, 1]^T$  sean vectores propios de A, ambos con autovalor asociado 1, y que  $[1, 0, -1]^T$  sea también un vector propio de A. ¿Cuánto vale  $A^8$ ? Describir geométricamente qué hace la matriz A sobre los vectores de  $\mathbb{R}^3$ ; es decir, cómo se comporta A: si es una rotación, una proyección, una simetría...; y en su caso sobre qué eje, plano, recta....

Pregunta 2 (3 puntos) Calcular la descomposición espectral de

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuánto vale A8? ¿Cuánto valen los valores y vectores singulares de A?

Pregunta 3 (4 puntos) Dadas las matrices

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

definimos el conjunto de matrices  $B = \{xI + yJ \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ : demostrar si (B, +) es o no un grupo, si  $(B, +, \cdot)$  es o no un anillo y si  $(B, +, \cdot)$  es o no un cuerpo. En cada caso, si lo es, indicar de qué tipo. Sugerencia: calcular cuánto valen las matrices  $I^2, J^2, IJ$  y JI.