

**COMUNICACIONES DIGITALES**  
**3<sup>er</sup> curso Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación**  
**Mención en Sistemas de Telecomunicación**  
**Universidad de Cantabria**

# **Tema 5. Sincronización**

**Jesús María Ibáñez Díaz**  
**GRUPO DE TRATAMIENTO AVANZADO DE SEÑAL (G.T.A.S.)**

# Índice

## **Tema 5. Sincronización**

### **5.1 Introducción**

### **5.2 Sincronismo de portadora**

5.2.1 Sincronización de fase con preámbulo

5.2.2 Lazo de Costas recursivo

5.2.3 Sincronización de fase ciega

5.2.4 Sincronismo frecuencial con preámbulo

### **5.3 Sincronismo temporal**

5.3.1 Sincronismo temporal con preámbulo

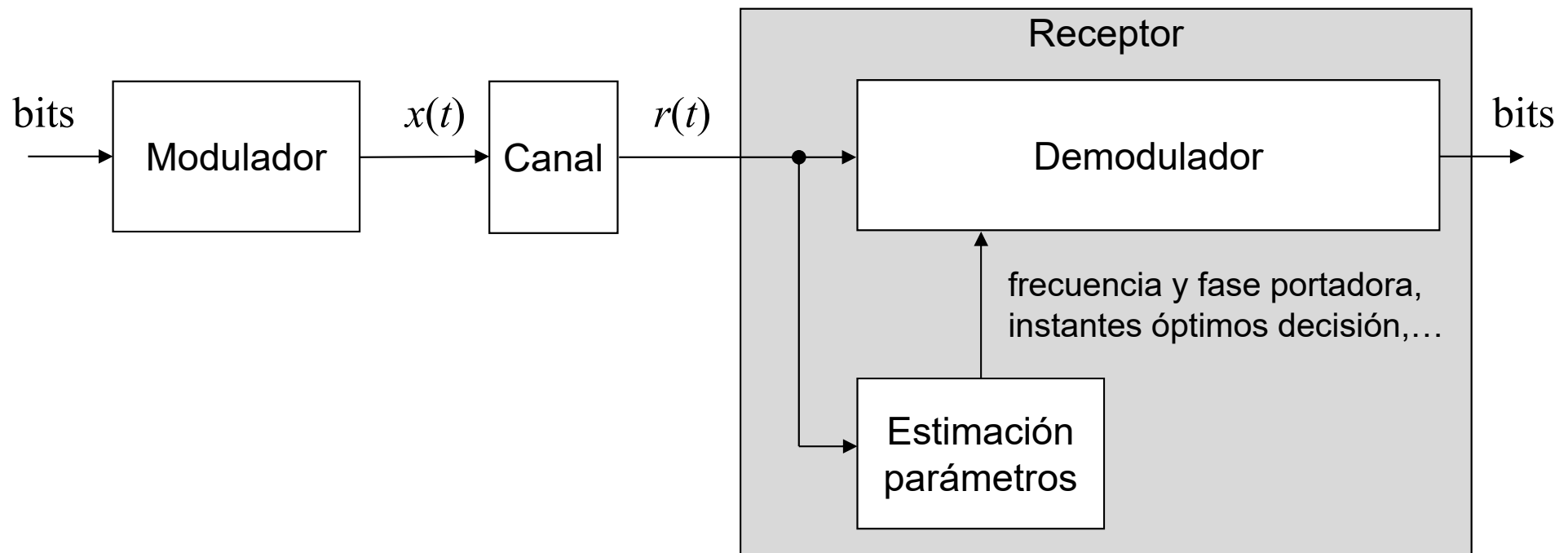
5.3.2 Sincronismo temporal ciego

### **5.4 Sincronización OFDM**

# 5.1 Introducción

# Necesidad de sincronismo en recepción

- En el receptor sólo disponemos de la señal recibida.
- A partir de la señal recibida debemos:
  - Generar una portadora de frecuencia y fase correcta.
  - Determinar el instante de decisión de cada símbolo.
  - Determinar las fronteras de tramas, cabeceras,...



- **Cualquier error de sincronismo repercute en la BER**

# Problemática del sincronismo en recepción

- **Baja SNR dificulta la sincronización.**
- **Existe influencia mutua entre los distintos parámetros a estimar**
  - **Por ejemplo, un sincronismo frecuencial deficiente dificulta el sincronismo temporal.**

- **Señal transmitida paso banda (ejemplo de modulación lineal):**

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \\ &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= \sum_n a_I[n] h_T(t - nT) \cos(2\pi f_c t) - \sum_n a_Q[n] h_T(t - nT) \sin(2\pi f_c t)\end{aligned}$$

- **Señal recibida (con ruido y distorsión del canal):**

$$r(t) = \sum_n a_I[n] h(t - nT) \cos(2\pi f_c t) - \sum_n a_Q[n] h(t - nT) \sin(2\pi f_c t) + w(t)$$

$$\text{con } h(t) = h_T(t) * h_C(t)$$

# Problemática del sincronismo en recepción

- **En realidad, si tenemos en cuenta errores de sincronización:**

$$r(t) = \sum_n a_I[n]h(t - n(T + \Delta T) + t_0) \cos(2\pi(f_c + \Delta f_c)t + \varphi_0) - \sum_n a_Q[n]h(t - n(T + \Delta T) + t_0) \sin(2\pi(f_c + \Delta f_c)t + \varphi_0) + w(t)$$

	Transmisión	Recepción	Tipo de error
<b>Frecuencia portadora</b>	$f_c$	$f_c + \Delta f_c$	Error (offset) frecuencial
<b>Fase de la portadora</b>	$0^\circ$	$\varphi_0$	Error de fase
<b>Instante 1<sup>er</sup> símbolo</b>	$0 s$	$t_0$	Retardo
<b>Periodo de símbolo</b>	$T = 1/R_s$	$T + \Delta T$	Error de reloj de símbolo

- **Estimación conjunta de todos estos parámetros de sincronización y de la secuencia de símbolos:**
  - Irrealizable en la práctica
  - Se atacan los problemas individualmente (sincronización temporal, frecuencial, detección de símbolos).

## 5.2 Sincronismo de portadora

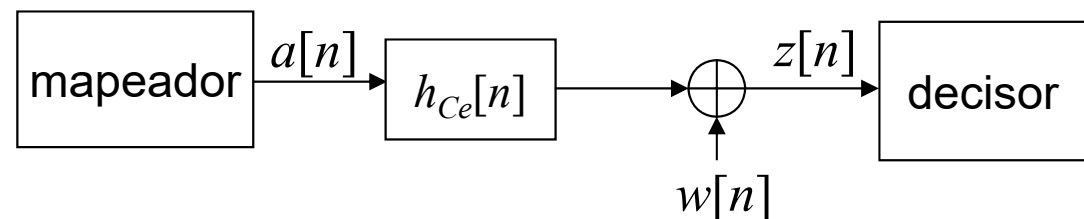
## Sincronización de portadora

- **Sincronismo de portadora:** reproducir en el receptor una señal senoidal con idéntica frecuencia y fase que las de la portadora de la señal recibida.
- **Si el error frecuencial es pequeño en relación a  $R_s$ :**
  - Provoca un giro (no constante pero lento) de la constelación.
  - El sincronismo de portadora se reduce al sincronismo de fase.
- **Repasaremos algunas técnicas simples de sincronización de fase y de frecuencia tanto ciegas como no ciegas.**



# Sincronización de fase con preámbulo

- **Técnica no ciega: usa pilotos/preámbulo.**
- **Condiciones de aplicación:**
  - i. **Sincronización temporal y frecuencial perfecta.**
  - ii. **Canal AWGN, es decir:**
    - Canal plano en frecuencia (sin memoria).
    - Invariante (constante al menos durante el preámbulo).
    - Ruido AWGN.
  - iii. **No importa el tipo de modulación.**
- **Sistema Discreto Equivalente:**



**Observables:**  $z[n] = a[n] * h_{Ce}[n] + w[n] = \alpha e^{j\varphi} a[n] + w[n]$

**con**  $w[n] \sim CN(0, \sigma^2)$  **y**  $h_{Ce}[n] = \alpha e^{j\varphi} \delta[n]$ , **siendo**  $h_{Ce} = \alpha e^{j\varphi}$  **desconocido**

## Sincronización de fase con preámbulo (II)

- El transmisor emite una secuencia de  $N$  símbolos/pilotos conocidos:

$$\vec{p} = [p[0], p[1], \dots, p[N-1]] \in \mathbb{C}$$

- Los correspondientes observables en el receptor son:

$$\vec{z} = [z[0], z[1], \dots, z[N-1]] \text{ con } z[n] = h_{ce}p[n] + w[n], \text{ es decir,}$$

$$\vec{z} = h_{ce}\vec{p} + \vec{w}$$

- Si consideramos **un solo piloto ( $N=1$ )**, el estimador LS (mínimos cuadrados) del canal es:

$$\hat{h}_{ce}^{LS} = \frac{z[n]}{p[n]} = h_{ce} + \frac{w[n]}{p[n]} \quad \text{Error de la estima} \sim CN(0, \sigma^2)$$

y el estimador LS del desfase es  $\hat{\phi}^{LS} = \text{angle}\left(\hat{h}_{ce}^{LS}\right) = \text{angle}\left(\frac{z[n]}{p[n]}\right)$

En la práctica  $\hat{h}_{ce}^{LS} = \frac{z[n]p^*[n]}{p[n]p^*[n]} \Rightarrow \hat{\phi}^{LS} = \text{angle}\left(z[n]p^*[n]\right)$

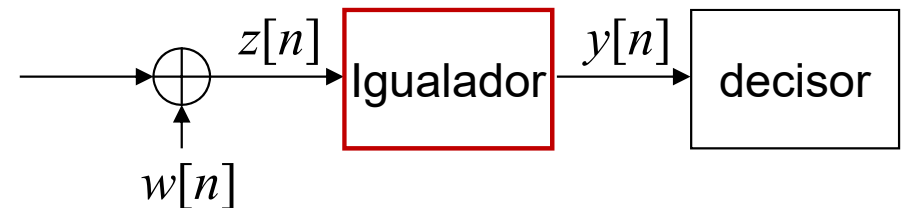
# Sincronización de fase con preámbulo (y III)

- Si consideramos  $N$  pilotos:

$$\hat{h}_{ce}^{LS} = \frac{\vec{z} \cdot \vec{p}^H}{\vec{p} \cdot \vec{p}^H} \Rightarrow \hat{\phi}^{LS} = \text{angle}(\vec{z} \cdot \vec{p}^H)$$

vemos que  $\hat{h}_{ce}^{LS} = h_{ce} + \frac{\vec{w} \cdot \vec{p}^H}{\vec{p} \cdot \vec{p}^H}$  *Error de la estima*  $\sim CN\left(0, \frac{\sigma^2}{N}\right)$   
(varianza de la estima  $N$  veces menor)

- Sincronizador (igualador) de fase:  $y[n] = z[n]e^{-j\hat{\phi}^{LS}}$



- Notas:

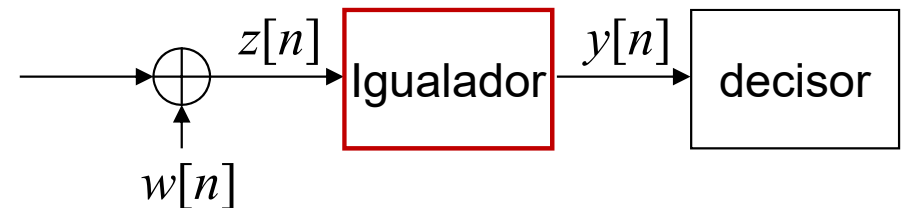
- Los pilotos no tienen por qué pertenecer a una constelación.
- Si  $N$  crece, la varianza de la estima decrece (estimador consistente).
- Si el ruido es AWGN, estos estimadores LS coinciden con los estimadores ML (máxima verosimilitud).

## Nota: Estima e Igualación de Canal

- El resultado anterior del sincronismo de fase a partir de un preámbulo,  $\vec{p}$ , de  $N$  símbolos nos proporciona la estima LS del canal completo, es decir, tanto de la fase como de la amplitud:

$$\hat{h}_{ce}^{LS} = \hat{\alpha}^{LS} e^{j\hat{\varphi}^{LS}} = \frac{\vec{z} \cdot \vec{p}^H}{\vec{p} \cdot \vec{p}^H}$$

- Igualador de canal (completo):  $y[n] = \frac{z[n]}{\hat{h}_{ce}^{LS}} = \frac{1}{\hat{\alpha}^{LS}} z[n] e^{-j\hat{\varphi}^{LS}}$



- Ejemplo (**Práctica 4**):

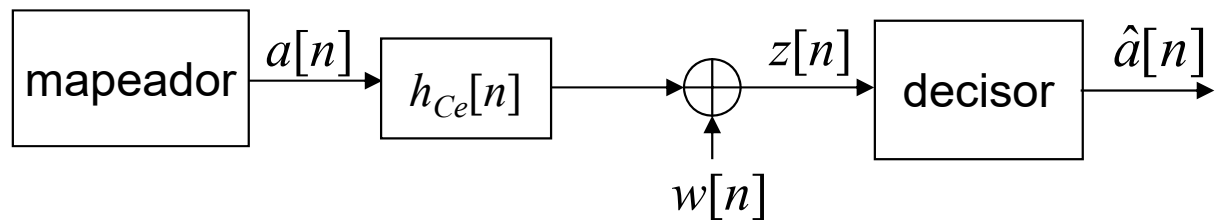
IEEE 802.11a/g (WiFi) usa  $N=2$  *long training symbols* (LT) al inicio de la trama para realizar la estima de canal.

La estima se realiza en el dominio de la frecuencia (post FFT).

Para cada subportadora se dispone de dos valores (dos pilotos) idénticos, el del LT1 y el del LT2.

## Lazo de Costas recursivo

- **Técnica ciega: No usa pilotos/preámbulo (realimenta decisiones).**
- **Condiciones de aplicación:**
  - i. **Sincronización temporal (de símbolo) perfecta.**
  - ii. **Canal AWGN.**
  - iii. **Modulación M-PSK.**
- **Sistema Discreto Equivalente:**



**Símbolos TX:**  $\vec{a} = [a[0], a[1], \dots, a[N-1]]$ ,

$$a[n] = e^{j\theta[n]} \text{ con } \theta[n] = k \frac{2\pi}{M}, \quad k = 0, \dots, M-1$$

**Observables:**  $\vec{z} = [z[0], z[1], \dots, z[N-1]] = \alpha e^{j\varphi} \vec{a} + \vec{w}$ ,  $z[n] = z_I[n] + jz_Q[n]$

**Decisiones:**  $\vec{\hat{a}} = [\hat{a}[0], \hat{a}[1], \dots, \hat{a}[N-1]]$ ,  $\hat{a}[n] = e^{j\hat{\theta}[n]} = \cos \hat{\theta}[n] + j \sin \hat{\theta}[n]$

## Lazo de Costas recursivo (II)

- **El log. neperiano de la función verosimilitud de  $\varphi$  y su derivada son:**

$$\ln\left(f_{\Phi}\left(\varphi \mid \vec{z}, \vec{\hat{a}}\right)\right) = l(\varphi) = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0} \sum_{n=0}^{N-1} \left( z_I[n] \cos\left(\hat{\theta}[n] + \varphi\right) z_Q[n] \sin\left(\hat{\theta}[n] + \varphi\right) \right)$$

$$\frac{dl(\varphi)}{d\varphi} = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0} \sum_{n=0}^{N-1} \text{imag}\left(z[n] \hat{a}^*[n] e^{-j\varphi}\right)$$

- **Si consideramos un único símbolo ( $N=1$ ):**

$$l(\varphi) = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0} \left( z_I[n] \cos\left(\hat{\theta}[n] + \varphi\right) z_Q[n] \sin\left(\hat{\theta}[n] + \varphi\right) \right)$$

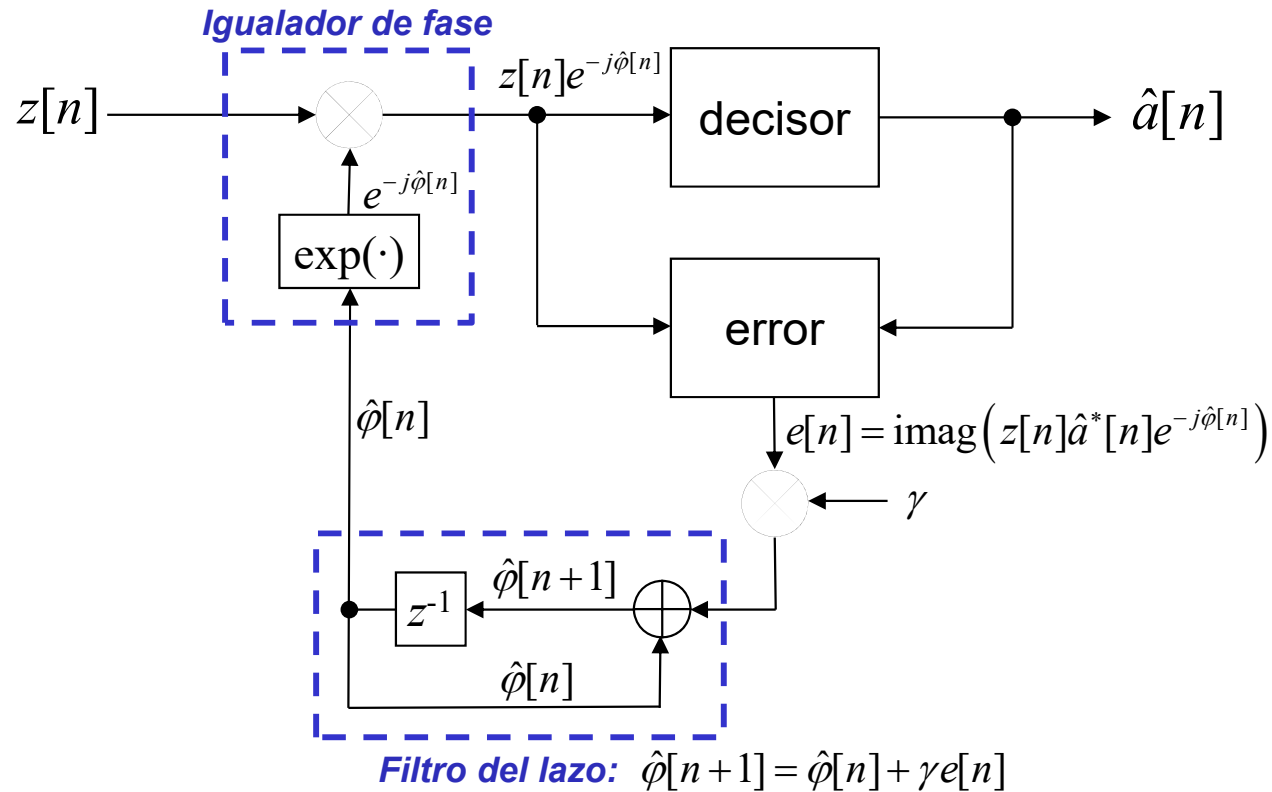
$$\frac{dl(\varphi)}{d\varphi} = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0} \text{imag}\left(z[n] \hat{a}^*[n] e^{-j\varphi}\right)$$

- **Lazo de Costas: estima iterativamente  $\varphi$  con cada nuevo símbolo.**
- **Es un algoritmo LMS (Least Mean Squares):**

$$\hat{\varphi}[n+1] = \hat{\varphi}[n] + \gamma e[n], \quad \text{con} \quad e[n] = \text{imag}\left(z[n] \hat{a}^*[n] e^{-j\hat{\varphi}[n]}\right)$$

# Lazo de Costas recursivo (III)

- Diagrama de bloques:



“En cada iteración nos movemos “un poco” ( $\gamma e[n]$ ) en la dirección (signo) “correcta” (correcta al menos en media)”.

## Lazo de Costas recursivo (y IV)

- **Influencia de la constante de paso,  $\gamma$ :**
  - $\gamma \uparrow \uparrow \rightarrow$  El algoritmo converge rápido. Mayor varianza de la estima.
  - $\gamma \downarrow \downarrow \rightarrow$  El algoritmo converge lento. Menor varianza de la estima.
- **Influencia de la SNR:**
  - $SNR \downarrow \downarrow \rightarrow$  Convergencia errática. Mayor varianza en estacionario.
  - $SNR \uparrow \uparrow \rightarrow$  Convergencia suave y monótona. Menor varianza en estacionario.
- **Algoritmo iterativo:** permite adaptarse si  $\varphi$  cambia con el tiempo.
- **Gira las constelaciones hasta orientarlas correctamente.**
- **Problemática:** ambigüedad de fase  $2\pi/M$
- **El Lazo de Costas está dirigido por decisión, pero existen otras técnicas totalmente ciegas.**



## Sincronismo de fase ciego

- **Técnica ciega: No usa pilotos/preámbulo ni realimenta decisiones.**
- **Condiciones de aplicación:**
  - i. **Sincronización temporal (de símbolo) perfecta.**
  - ii. **Canal AWGN.**
  - iii. **Modulación M-PSK.**
- **Se elimina la modulación M-PSK elevando los observables a la potencia M-ésima.**
- **Ejemplo BPSK ( $M=2$ ):**

**Constelación:**  $A = \{+1, -1\} = \{e^{j0}, e^{j\pi}\} \quad \Rightarrow A^2 = +1 = e^{j0}$

**Símbolos:**  $a[n] = \pm 1 = e^{j\theta[n]} \quad \text{con} \quad \theta[n] \in \{0, \pi\}$

**Observables:**  $z[n] = a[n]e^{j\varphi} \Rightarrow z^M[n] = a^2[n]e^{j2\varphi} = e^{j(2\theta[n]+2\varphi)} = e^{j2\varphi}$   
(sin ruido, con desfase  $\varphi$ )

## Sincronismo de fase ciego (y II)

- **Ejemplo QPSK ( $M=4$ ):**

**Constelación:**  $A = \{e^{j\pi/4}, e^{j3\pi/4}, e^{j5\pi/4}, e^{j7\pi/4}\} \Rightarrow A^4 = e^{j\pi} = -1$

**Símbolos:**  $a[n] = (\pm 1 \pm j) / \sqrt{2} = e^{j\theta[n]}$  con  $\theta[n] \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

**Observables:**  $z[n] = a[n]e^{j\varphi} \Rightarrow z^4[n] = a^4[n]e^{j4\varphi} = e^{j(4\theta[n]+4\varphi)} = e^{j(\pi+4\varphi)}$   
(sin ruido, con desfase  $\varphi$ )

- **Algoritmo LMS a usar:**

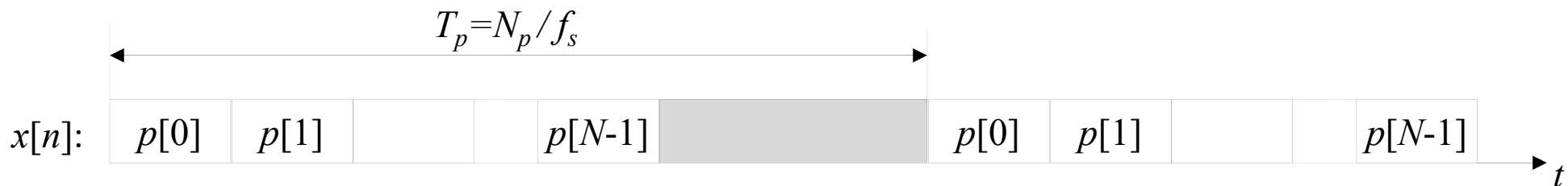
$$\hat{\varphi}[n+1] = \hat{\varphi}[n] + \gamma e[n], \quad \text{con} \quad e[n] = \text{imag}\left(z^M[n] E[A^M] e^{-jM\hat{\varphi}[n]}\right)$$

- **Se aprovecha la propiedad de que  $a^M[n] = cte$ .**
- **Más sensible al ruido que el Lazo de Costas.**
- **Convergencia más lenta y mayor varianza en la estima.**

# Sincronismo frecuencial con preámbulo

- **Condiciones de aplicación:**
  - Sincronización temporal (de símbolo) perfecta.
  - Canal invariante (constante).
- **No importa:**
  - Tipo de modulación.
  - Canal con/sin memoria (selectivo o no en frecuencia).
- **Transmitimos una secuencia de  $N$  símbolos (o muestras) piloto que se repite a los  $T_p$  segundos.**

$$\vec{p} = [p[0], p[1], \dots, p[N-1]] \in \mathbb{C}$$



- **En recepción (distorsión del canal, offset frecuencial y ruido AWGN):**

$$r[n] = (x[n] * h_c[n]) e^{j2\pi\Delta f_c n / f_s} + w[n]$$

## Sincronismo frecuencial con preámbulo (II)

- **Recibimos las dos secuencias piloto distanciadas  $T_p$  segundos, es decir, separadas  $N_p = T_p f_s$  muestras:**

$$\vec{p}_{r_1} = [p_{r_1}[0], p_{r_1}[1], \dots, p_{r_1}[N-1]] = [r[n_0], r[n_0+1], \dots, r[n_0+N-1]]$$

$$\vec{p}_{r_2} = [p_{r_2}[0], p_{r_2}[1], \dots, p_{r_2}[N-1]] = [r[n_0+N_p], r[n_0+N_p+1], \dots, r[n_0+N_p+N-1]]$$

- **La expresión**

$$\Delta\hat{\phi} = \text{angle}(\vec{p}_{r_1} \cdot \vec{p}_{r_2}^H)$$

**proporciona el estimador ML del desfase entre  $\vec{p}_{r_1}$  y  $\vec{p}_{r_2}$ , es decir, el giro que ha sufrido la señal en  $T_p$  segundos (en  $N_p$  muestras)**

- **Por tanto, el offset frecuencial se puede estimar como:**

$$\Delta\hat{f}_c (\text{Hz}) = \frac{\Delta\hat{\phi}}{2\pi T_p} = \frac{\Delta\hat{\phi}}{2\pi N_p} f_s$$

## Sincronismo frecuencial con preámbulo (III)

- **Influencia de la longitud,  $N$ , de la secuencia piloto:**

$N \uparrow \uparrow \rightarrow$  Menor varianza de la estima (estimador consistente).  
Disminuye la eficiencia espectral y de potencia.

- **Influencia de la distancia,  $T_p$ , entre las dos secuencias piloto:**

- El estimador  $\Delta \hat{\phi}$  no es capaz de distinguir entre  $\Delta \phi$ ,  $\Delta \phi + 2k\pi$  y  $2k\pi - \Delta \phi$ .

- Imprescindible garantizar que  $|\Delta \phi| < \pi = 180^\circ$ .

- El error frecuencial máximo estimable es:  $|\Delta f_c| < \frac{1}{2T_p} = \frac{f_s}{2N_p}$

- Este estimador se utiliza en muchos sistemas orientados a la trama.

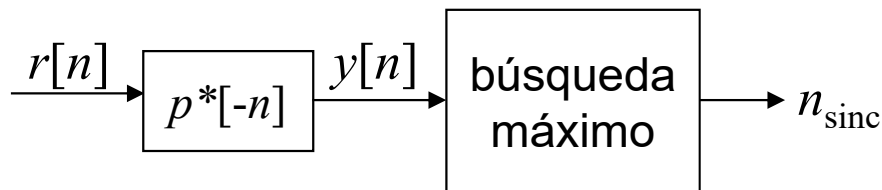
- Ejemplo (**Práctica 4**):

IEEE 802.11a/g (WiFi) usa *short* y *long training symbols* al inicio de la trama para posibilitar el sincronismo frecuencial.

## 5.3 Sincronismo temporal

# Sincronismo temporal con preámbulo

- Técnicas basadas en la correlación.
- Filtro adaptado:
  - Búsqueda de una forma de onda,  $p[n] \in \mathbb{C}$  con  $n = 0:N-1$ , en AWGN.
  - Correlar la señal recibida con  $p^*[n]$ , es decir, filtrar con el filtro adaptado cuya respuesta al impulso es  $p^*[-n]$ .



$$n_{sinc} = \arg \max_n (|y[n]|) \text{ sujeto a } |y[n_{sinc}]| > \gamma$$

- Esta técnica se utiliza en muchos sistemas orientados a la trama.
- Ejemplo (**Práctica 4**):  
IEEE 802.11a/g (WiFi) puede usar los 10 *short training symbols* al inicio de la trama para realizar el sincronismo temporal (y la detección de trama).

## Sincronismo temporal ciego

- **Múltiples técnicas y, por lo general, complicadas.**
- **Explotan el conocimiento de alguna característica de la señal.**
- **Ejemplos:**
  - **OFDM: la extensión cíclica introduce una periodicidad en la señal recibida.**
  - **Algoritmo *early-late* en señales polares banda base (o en señales en fase y cuadratura).**



## 5.4 Sincronización OFDM

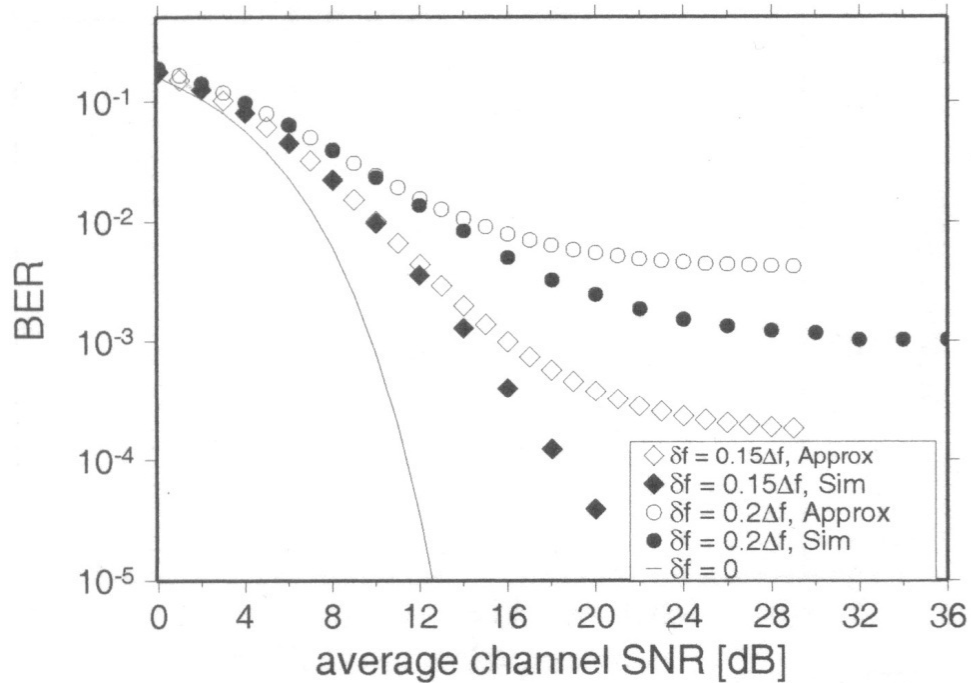
# Sincronización OFDM

- **Temporal:**
  - **Determinar los límites temporales de cada símbolo OFDM.**
  - **Buscar la ventana temporal óptima de cálculo de FFT para minimizar la ISI.**
  
- **Frecuencial:**
  - **Ortogonalidad sólo si Tx y Rx usan (sintetizan) exactamente la misma frecuencia portadora.**
  - **El offset de frecuencia y/o el ruido de fase del oscilador de recepción provoca ICI.**

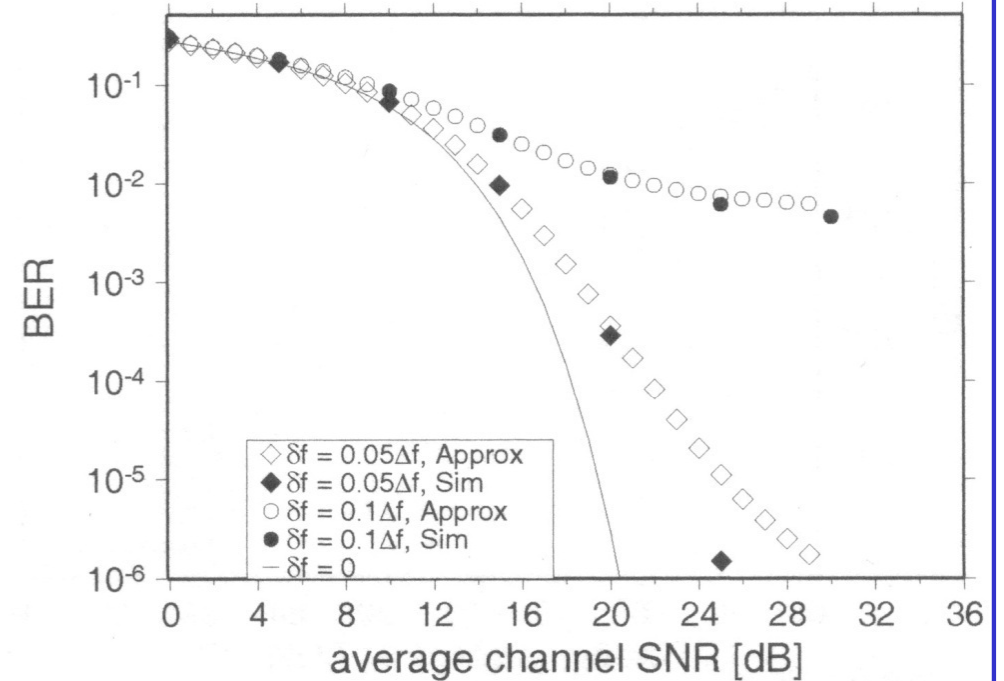
**OFDM requiere técnicas de sincronización.**

# OFDM: Impacto del offset frecuencial

## Efecto del error frecuencial sobre la BER de OFDM en AWGN



(a) QPSK



(b) 16QAM

$\Delta f$ : distancia entre subportadoras

$\delta f$ : offset frecuencial

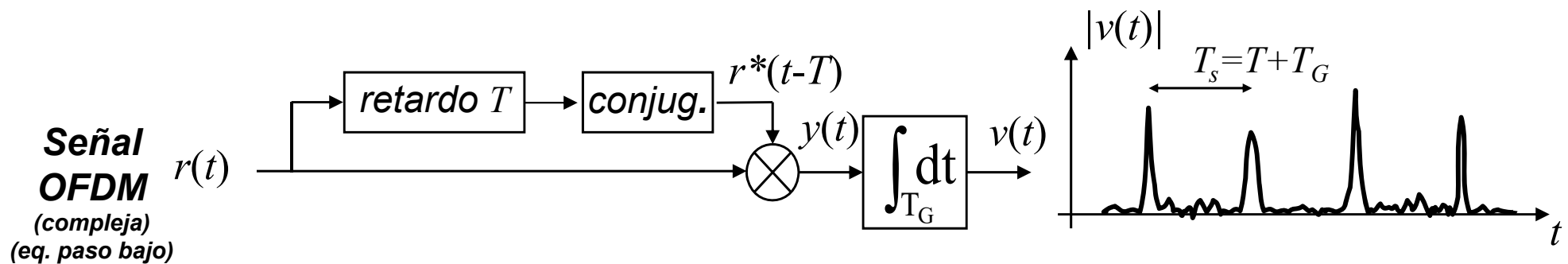
## OFDM orientada a la trama

- **Sistemas OFDM que transmiten tramas (transmisión a ráfagas).**
- **Se hace uso de preámbulos:**
  - **Símbolos OFDM conocidos de entrenamiento al inicio de cada trama.**
  - **Se correla sobre la totalidad del preámbulo.**
- **Necesario sincronismo rápido y fiable.**
- **Ejemplo (Práctica 4):**

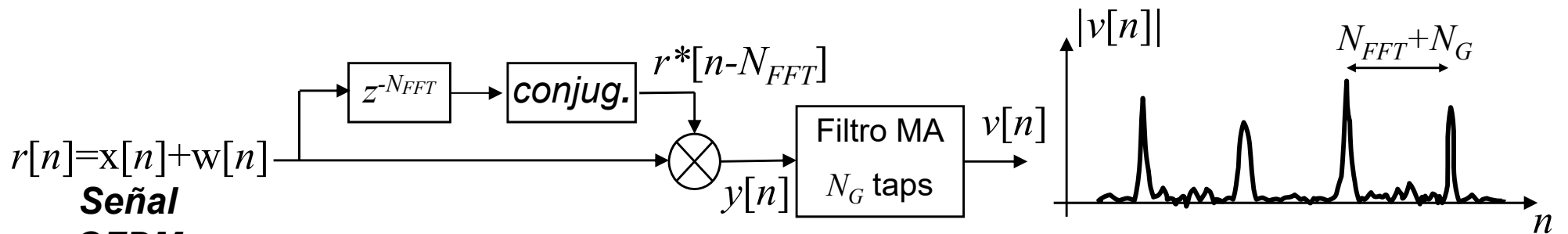
IEEE 802.11a/g (WiFi) usa *short/long training symbols* al inicio de la trama para realizar el sincronismo temporal y frecuencial además de Control Automático de Ganancia (AGC), detección de trama y estima de canal.

# OFDM transmisión continua

- **Sistemas OFDM que transmiten continuamente.**
- **Hacen uso de la extensión cíclica:**
  - Los primeros  $T_G$  segundos ( $N_G$  muestras) de cada símbolo OFDM son idénticos a los últimos.
  - Se realiza la **autocorrelación** integrando en un intervalo  $T_G$ .
  - Necesario promediar durante varios símbolos OFDM para reducir la varianza de la estima (de los picos).



# OFDM transmisión continua (y II)



**Señal OFDM**  
(compleja)  
(eq. paso bajo)

$$y[n] = r[n] r^*[n - N_{FFT}]$$

$$= x[n] x^*[n - N_{FFT}] + x[n] w^*[n - N_{FFT}] + w[n] x^*[n - N_{FFT}] + w[n] w^*[n - N_{FFT}]$$

$$v[n] = \sum_{m=0}^{N_G-1} y[n-m]$$

**Incorreladas**

$$E[x[n]w[n]] = E[x[n]]E[w[n]] = 0$$

**incorreladas**

**incorreladas**

- Se buscan picos de  $|v[n]|$  (espaciados  $T_S$  segundos,  $N_{FFT} + N_G$  muestras)
  - Los **instantes** de los picos proporcionan el **sincronismo temporal**, es decir, indican el inicio de cada símbolo OFDM.
  - La **fase** de  $v[n]$  en los picos representa una estima del desfase,  $\Delta\hat{\phi}$ , entre  $r[n]$  y  $r[n - N_{FFT}]$ , lo que permite estimar el **offset frecuencial** usando:

$$\Delta\hat{f}_c \text{ (Hz)} = \frac{\Delta\hat{\phi}}{2\pi T} = \frac{\Delta\hat{\phi}}{2\pi N_{FFT}} f_s$$