Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

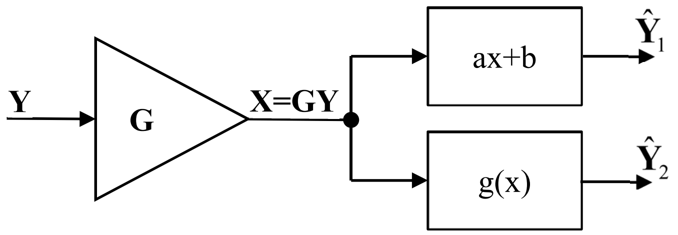
HOJA DE PROBLEMAS 5

---

1. Un móvil avanza en línea recta en instantes discretos de tiempo; en cada instante tiene una probabilidad p de avanzar 1 metro y q =1-p de permanecer parado. Se consideran 2 instantes de tiempo consecutivos y se definen las v.a.'s **X**: "distancia avanzada sólo *en el primer* instante" e **Y**: "distancia avanzada en *los dos* instantes".

a) Obtener las probabilidades de los puntos del rango o recorrido de la v.a. bidimensional (**X**,**Y**) y las probabilidades marginales de **X** e **Y**. ¿Son estas v.a.'s independientes?
b) Calcular el coeficiente de correlación de **X** e **Y** y el estimador lineal óptimo de **Y** en función de **X**. ¿Son **X** e **Y** incorreladas?
c) Obtener el estimador óptimo (sin restricciones) de **Y** en función de **X**.

2. En el esquema de la figura, **Y** representa una tensión desconocida e inaccesible que sufre una atenuación también desconocida, **G**, de forma que sólo se puede obtener medidas de **X**=**GY**. Tanto **Y** como **G** pueden suponerse uniformes en [0,1] e independientes. Se trata de estimar **Y** a partir de **X** mediante los dos bloques de la figura:



a) Obtener las constantes a y b del bloque superior, de forma que $\hat{Y}_1$ sea la estimación lineal de **Y** de mínimo error cuadrático medio.
b) Obtenga la función g(x) del bloque inferior que hace que $\hat{Y}_2$ sea la estimación no lineal de **Y** de mínimo error cuadrático.
c) Calcule el coeficiente de correlación de **X** e $\hat{Y}_1$ y la covarianza de **X** e $\hat{Y}_2$.

3. Sean $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$ dos v.a.'s $N(0,\sigma_1^2)$ y $N(0,\sigma_2^2)$ respectivamente ($\sigma_1<\sigma_2$). Se forma la nueva v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{YX_1}+(1-\mathbf{Y})X_2$ donde **Y** es una v.a. de Bernoulli de parámetro p y siendo $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ e **Y** independientes entre sí. Se pide:

a) La función densidad de probabilidad de **Z**.
b) La media y la varianza de **Z**.
c) A partir del conocimiento de $\mathbf{X_2}$, los estimadores lineal cuadrático medio óptimo y cuadrático medio óptimo sin restricciones de **Z**.

4. El tiempo en milisegundos necesario para transferir un archivo de datos desde una unidad de disco a la memoria central de un ordenador puede modelarse como una v.a. **Z**, que es de la forma **Z** = **X**+c**Y**, donde **X** es el tiempo que tarda la cabeza lectora en colocarse al principio del archivo, **Y** el tamaño en kbytes de éste y c una constante. Supondremos **X** uniforme entre 30 y 50 ms, **Y** normal de media η_Y = 100 kbytes, desviación típica σ_Y = 10 kbytes e independiente de **X** y c = 0.5 ms/kbyte. Calcule:

a) La media y la varianza de **Z** y el coeficiente de correlación de **Y** y **Z**.
b) La fdp de **Z**.
c) Los estimadores lineal y no lineal óptimos (recta y línea de regresión respectivamente) de **Z** en función de **Y**.

Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 5

---

1. a) $\Omega_{XY}=\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2)\}$

$P(\mathbf{X}=0,\mathbf{Y}=0)=q^2$, $P(\mathbf{X}=0,\mathbf{Y}=1)=pq$, $P(\mathbf{X}=1,\mathbf{Y}=1)=pq$, $P(\mathbf{X}=1,\mathbf{Y}=2)=p^2$

$P(\mathbf{X}=0)=q$, $P(\mathbf{X}=1)=p$

$P(\mathbf{Y}=0)=q^2$, $P(\mathbf{Y}=1)=2pq$, $P(\mathbf{Y}=2)=p^2$

X e **Y** No son Independientes

b) $\eta_X=p$, $\eta_Y=2p$, $\sigma_X^2=pq$, $\sigma_Y^2=2pq$, $E[\mathbf{XY}]=p(1+p) \Rightarrow r_{XY}=1/\sqrt{2}$

X e **Y** No están Incorreladas (están correladas)

$\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{X}+p$

c) $\hat{\mathbf{Y}}=E[\mathbf{Y}\mid\mathbf{X}=x]=\mathbf{X}+p$

2. a) $a=6/7$, $b=2/7 \Rightarrow \hat{\mathbf{Y}}_1=\dfrac{6}{7}\mathbf{X}+\dfrac{2}{7}$

b) $\hat{\mathbf{Y}}_2=\dfrac{\mathbf{X}-1}{\ln\mathbf{X}}$

c) $r_{X\hat{Y}_1}=\dfrac{a}{|a|}$, $C_{X\hat{Y}_2}=\dfrac{1}{24}$

3. a) $f_Z(z)=p\,N(0,\sigma_1^2)+q\,N(0,\sigma_2^2)$

b) $\eta_Z=0$, $\sigma_Z^2=p\sigma_1^2+q\sigma_2^2$

c) Estimador lineal: $\hat{\mathbf{Z}}=(1-p)\mathbf{X}_2$

Estimador sin restricciones: $\hat{\mathbf{Z}}=(1-p)\mathbf{X}_2$

4. a) $E[\mathbf{Z}]=E[\mathbf{X}]+cE[\mathbf{Y}]=90\text{ms}$

Suma de v.a.'s independientes $\Rightarrow \sigma_Z^2=\sigma_X^2+c^2\sigma_Y^2=58.3\text{ms}^2$

$r_{YZ}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

b) $f_Z(z)=\dfrac{1}{20}\left[G\left(\dfrac{z}{5}-16\right)-G\left(\dfrac{z}{5}-20\right)\right]$

c) Estimador lineal: $\hat{\mathbf{Z}}=c\mathbf{Y}+\eta_X=0.5\mathbf{Y}+40$

Estimador sin restricciones: $\hat{\mathbf{Z}}=c\mathbf{Y}+\eta_X=0.5\mathbf{Y}+40$