Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

HOJA DE PROBLEMAS 4

---

1. Sea (**X**,**Y**) una v.a. bidimensional cuya fdp conjunta viene dada por:

$$f_{XY}(x,y) = c(2x + y) \quad \text{en la región} \quad \begin{cases} 2 < x < 6 \\ 0 < y < 5 \end{cases}$$

Obtenga:

a) la constante c
b) las funciones de distribución marginales $F_X(x)$ y $F_Y(y)$
c) las funciones densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
d) P(3<**X**<4,**Y**>2)
e) P(**X**>3)
f) P(**X**+**Y**>4)
g) la función de distribución conjunta.
h) ¿son **X** e **Y** independientes?

2. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s de Bernoulli independientes, con P(**X**=1)=P(**Y**=1)=p, P(**X**=0)=P(**Y**=0)=q=1-p. Se forma la v.a. **Z**=**X**⊕**Y**, donde el símbolo ⊕ denota la operación "OR exclusiva", definida en la siguiente tabla:

X	**Y**	**Z=X⊕Y**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) Demuestre que las v.a.'s **X** y **Z** no son, en general, independientes.
b) Calcule la covarianza de las v.a.'s **X** y **Z.**
c) Determine los posibles valores de p que hacen que **X** y **Z** estén incorreladas; para dichos valores de p, ¿ son **X** y **Z** independientes?

3. Sea la v.a. bidimensional (**X**,**Y**) continua con fdp conjunta de valor constante en la región del plano dada por

$$R = \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

y nula en el resto. Obtenga $F_{XY}(x,y)$, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$.

4. Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo (0,T) y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre a la derecha del anterior, y se definen las v.a.'s **X**: "posición del primer punto" e **Y**: "distancia del segundo al primero".

a) Demuestre que la fdp conjunta de las v.a.'s **X** e **Y** es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{T(T-x)} \begin{cases} 0 < x < T \\ 0 < y < T - x \end{cases}$$

b) ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

c) Calcule P(**Y**<**X**).

5. Dadas las v.a.'s continuas **X** e **Y**, se sabe que **X** es uniforme en (0,1) y la $f_Y(y|x)$ no depende de y si se verifica $-x<y<x$, anulándose fuera de dicho recinto. Calcular:

a) La fdp conjunta, $f_{XY}(x,y)$, dibujando el rango de dicha v.a. bidimensional.

b) E(**XY**).

c) La fdp marginal de y, $f_Y(y)$. ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

6. Sea (**X**,**Y**) una variable bidimensional con función densidad de probabilidad conjunta f(x,y)=K en la región del espacio siguiente: $R=\{y>0,\ x^2+y^2<1\}$.

a) Dibuje el rango de la variable aleatoria bidimensional (**X**,**Y**) y determine el valor de la constante K.

b) Calcule la función densidad de probabilidad marginal $f_X(x)$ y la condicional $f_Y(y|x)$. ¿Son **X** e **Y** independientes?

c) Calcule E[**XY**] y obtenga la probabilidad $P(0.5<x^2+y^2<1)$.

7. Un multiplexor posee dos entradas cuya amplitud se modela mediante las variables aleatorias **X** uniforme en el intervalo [-3,3] e **Y** uniforme en [2,8]. La señal **Z** que controla el multiplexor se modela mediante una v.a. de Bernoulli con parámetro p. La amplitud de salida del multiplexor se denota con la v.a. **V** que sigue la expresión **V** = **ZX**+(1-**Z**)**Y**, siendo las variables **X**, **Y** y **Z** independientes entre sí.

a) Especifique y dibuje los siguientes rangos: Ω_{XY}, Ω_{XZ} y Ω_{ZV}.

b) Calcule la media y la varianza de la amplitud a la salida del multiplexor.

c) Calcule la función densidad de probabilidad de **V**. Dibújela.

d) [1]Determine el estimador $\hat{\mathbf{V}}$ sin restricciones de menor error cuadrático medio de **V** en función de **Z**. A la vista del resultado ¿están **V** y **Z** correladas?, ¿y $\hat{\mathbf{V}}$ y **Z**?

e) Obtenga el estimador lineal de menor error cuadrático medio de **V** en función de **X**.

Considere que se sustituye el multiplexor por un combinador (un sumador) de manera que la nueva salida, **W**, no es más que **W** = **X**+**Y**.

f) ¿Cuál es el rango de **W**? Dibuje la función densidad de probabilidad de la amplitud de salida del combinador.

---

[1] Para resolver los apartados d) y e) son precisos conocimientos tratados en el Tema 5.

Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 4

1. a) c=1/210

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ c(5x^2 + 12.5x - 45) & 2 < x < 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ c(2y^2 + 32y) & 0 < y < 5 \\ 1 & y > 5 \end{cases}$

c) $f_X(x) = \begin{cases} c(10x + 12.5) & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} c(4y + 32) & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

d) P(3<**X**<4,**Y**>2)=3/20

e) P(**X**>3)=23/28

f) P(**X**+**Y**>4)=33/35

g) $F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 2 \text{ ó } y < 0 \\ c(x^2y + 0.5y^2x - 4y - y^2) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ c(5x^2 + 12.5x - 45) & 2 < x < 6, y > 5 \\ c(2y^2 + 32y) & x > 6, 0 < y < 5 \\ 1 & x > 6, y > 5 \end{cases}$

h) No son independientes

2. b) C_{XY}=pq(q-p)

c) C_{XY}=0 $\Rightarrow \begin{cases} p = 0, q = 1 \\ q = 0, p = 1 \\ p = q = 1/2 \end{cases} \Rightarrow$ **X**, **Z** son independientes

3.

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ 2xy & (x,y) \in R \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1, y > 1 \\ 2x - x^2 + 2y - y^2 - 1 & 0 < x < 1, 1 - x < y < 1 \\ 2y - y^2 & x > 1, 0 < y < 1 \\ 1 & x > 1, y > 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = F_{XY}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2y - y^2 & 0 < y < 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

4. a) **X** v.a. uniforme en [0,T] $\Rightarrow f_X(x)=1/T$ para $0<x<T$

$f_Y(y|x)$ uniforme en [0,T-x] $\Rightarrow f_Y(y|x)=1/(T-x)$ para $0<y<T-x$

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y|x)$

b) $E[\mathbf{XY}]=T^2/12$

$E[\mathbf{X}]=T/2$

$f_Y(y)=\ln(T/y)/T$ para $0<y<T \Rightarrow E[\mathbf{Y}]=T/4$

$E[\mathbf{XY}]\neq E[\mathbf{X}]E[\mathbf{Y}] \Rightarrow$ **X** e **Y** están correladas

c) $P(\mathbf{Y}<x)=\ln(2)$

5. a) $f_Y(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & \text{para } -x<y<x\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$ $\quad f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & \text{en } R=\begin{cases}0<x<1\\ -x<y<x\end{cases}\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

b) $E[\mathbf{XY}]=0$

c) $f_Y(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(|y|) & \text{para } -1<y<1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

$E[\mathbf{X}]=1/2$, $E[\mathbf{Y}]=0$, $E[\mathbf{XY}]=0 \Rightarrow E[\mathbf{XY}]=E[\mathbf{X}]E[\mathbf{Y}] \Rightarrow$ **X**, **Y** incorreladas

6. a) $k=2/\pi$

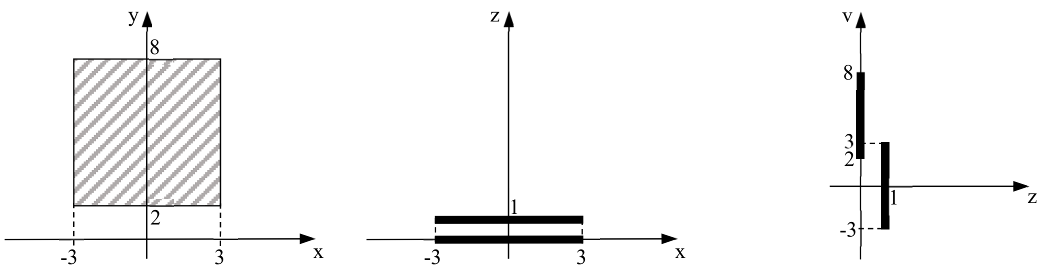
b) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & 0<y<1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

$f_{XY}(xy)\neq f_X(x)f_Y(y) \Rightarrow$ **X**, **Y** no son independientes

c) $E[\mathbf{XY}]=0$

$P(0.5<x^2+y^2<1) = 1/2$

7. a)



b) $E[\mathbf{V}]=5q$, $Var[\mathbf{V}]=3+25p(1-p)$

c) $f_V(v)=\begin{cases}p/6, & -3<v\le 2;\\ 1/6, & 2<v\le 3;\\ (1-p)/6, & 3<v\le 8;\\ 0, & resto.\end{cases}$

d) $\widehat{\mathbf{V}}=g(\mathbf{Z})=5-5z$

e) $\widehat{\mathbf{V}}_{lineal}=px+(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{5}$

f) $\Omega_{\mathbf{W}}=[-1,11]$ $\qquad f_W(w)=\begin{cases}(w+1)/36, & -1\le w\le 5;\\ (11-w)/36, & 5<w\le 11;\\ 0, & resto.\end{cases}$