Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

HOJA DE PROBLEMAS 3

1. Se dispone de un circuito cuantificador de 4 niveles (2 bits), cuya característica de transferencia es la mostrada en la Figura 1. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una v.a. **X** con fdp tal como muestra la Figura 2.

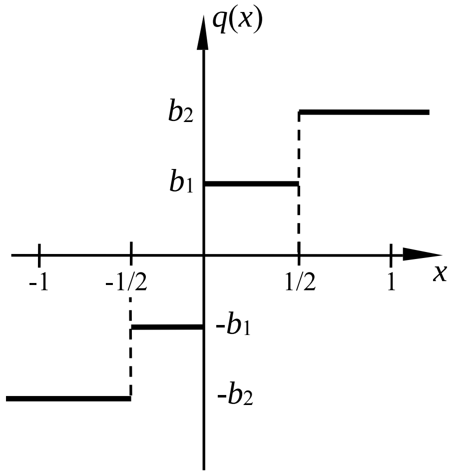


Figura 1

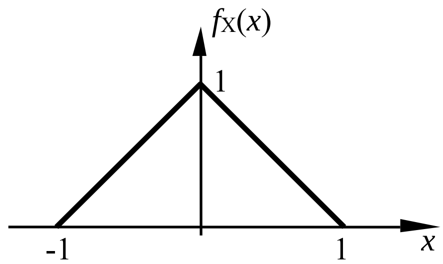
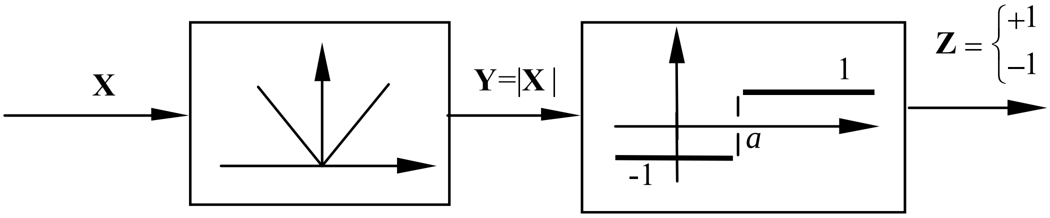


Figura 2

a) Determine y represente la función de distribución de la v.a. **Y**=q(**X**).
b) Calcule los valores de los niveles de cuantificación b_1 y b_2 que hacen que la varianza de la v.a. **Y**-**X** (error de cuantificación) sea mínima.

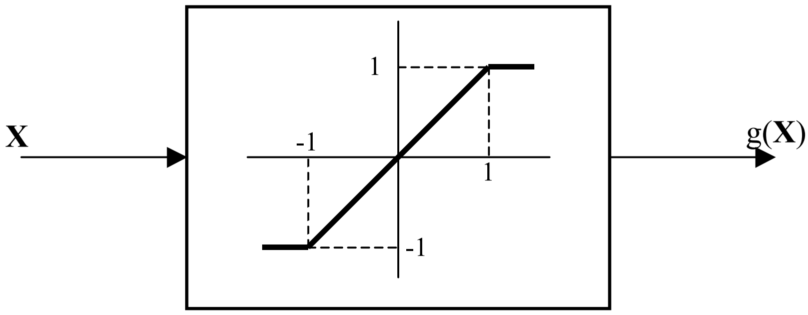
2. Un sistema de detección de intrusos está formado por un emisor que envía pulsos ultrasónicos y un receptor que decide dar o no dar señal de alarma en función de los ecos recibidos al rebotar los pulsos en los objetos circundantes. La amplitud del eco recibido al enviar un único pulso puede modelarse como una v.a. **X**, que es $N(0,\sigma_0^2)$ cuando no hay intruso y $N(0,\sigma_1^2)$ cuando lo hay (siendo $\sigma_0<\sigma_1$). Dicho eco se pasa por un rectificador de onda completa y un comparador con umbral *a*, obteniéndose una nueva v.a. **Z** como muestra la Figura. Se pide:



$$\mathbf{Z} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{Y} > a \\ -1 & \text{si } \mathbf{Y} \le a \end{cases}$$

a) Calcular el umbral *a* de forma que, cuando <u>no hay intruso</u>, **Z** tenga media nula.
b) Para el umbral del apartado anterior, calcular la media y la varianza de **Z** cuando <u>hay intruso</u> y $\sigma_1 = 2\sigma_0$.

3. El ruido en un determinado sistema de comunicaciones es blanco y con distribución uniforme en [-a,a] ($a \geq 1$). Dicho ruido atraviesa un dispositivo no lineal sin memoria como el que muestra la figura:



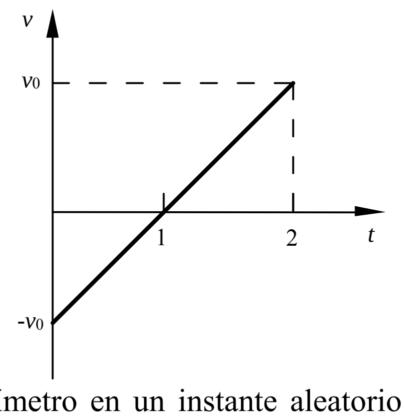
a) Calcule la función densidad de probabilidad de **Y**=g(**X**) en función de a.
b) Calcule la probabilidad de |**Y**|=1 en función de a.
c) Calcule el cociente entre las varianzas de **Y** y de **X**. Particularice para a=1 y a=2 e interprete los resultados. ¿Reduce el dispositivo no lineal la potencia de ruido?

4. Sea **X** una v.a. uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$; se aplica a dicha v.a. la transformación **Y**=g(**X**)=a sen(**X**+θ), con $a>0$ y $\theta \in \mathrm{R}$.
a) Obtenga la fdp de la v.a. **Y**.
b) Obtenga su función de distribución.

5. Un diodo presenta una característica corriente-tensión de la forma:

$$i(v) = i_0 \left(e^{v/v_0} - 1\right) u(v)$$

siendo v_0 e i_0 constantes positivas. Se aplica a dicho diodo una entrada en rampa durante dos segundos como la mostrada en la figura.



Se mide la corriente en un amperímetro en un instante aleatorio dentro de los 2 segundos posteriores al inicio del experimento.
a) Calcule el valor medio de la corriente medida por el amperímetro.
b) Determine un intervalo en el cual esté incluida la corriente medida con probabilidad igual o superior a 0.9, usando para su cálculo la función distribución de probabilidad de la corriente.

6. Se lanza un dado 6000 veces. Calcular, realizando las aproximaciones que considere necesarias:
a) La probabilidad de que el número de veces que salga 1, está comprendida entre 980 y 1005.
b) La probabilidad de que el número de veces que salga 1 sea 1005.

Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 3

1. a) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -b_2 \\ 1/8 & -b_2 \le y < -b_1 \\ 1/2 & -b_1 \le y < b_1 \\ 7/8 & b_1 \le y < b_2 \\ 1 & y \ge b_2 \end{cases}$ b) $\varepsilon = \mathrm{Var}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X})] = \frac{3}{4}b_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2 - \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{6}$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b_1 = \frac{2}{9}\ ,\ b_2 = \frac{2}{3}$

2. a) $E[\mathbf{Z}|\bar{I}] = 3\text{-}4G(a/\sigma_0) = 0 \Rightarrow a \approx 0.67\sigma_0$
b) $\mathrm{Var}[\mathbf{Z}|I] = E[\mathbf{Z}^2|I]\text{-}E[\mathbf{Z}|I]^2 \approx 1\text{-}0.48^2 = 0.77$

3. a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{a-1}{2a}\delta(y+1) + \frac{1}{2a} + \frac{a-1}{2a}\delta(y-1), & y \in [-1,1]; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$

b) $P(|\mathbf{Y}|=1) = P(\{\mathbf{Y}=-1\} \cup \{\mathbf{Y}=1\}) = P(\mathbf{Y}=+1)+P(\mathbf{Y}=-1) = (a-1)/a$

c) $\sigma_X^2 = \frac{a^2}{3}\ ,\ \sigma_Y^2 = \frac{3a-2}{3a} \Rightarrow \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = \frac{3a-2}{a^3}$

4. a) $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}$ para $|y| < a$ b) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arcsen}\left(\frac{y}{a}\right) & -a \le y \le a \\ 1 & y \ge a \end{cases}$

5. a) $\eta_I = E[\mathbf{I}] = \frac{i_0}{2}(e\text{-}2)$

b) $[0, 1.23i_0]$ pues $F_I(i) = \begin{cases} 0 & i < 0 \\ \frac{1}{2}\left[1 + \ln\left(1 + \frac{i}{i_0}\right)\right] & 0 \le i \le i_0(e-1) \\ 1 & i > i_0(e-1) \end{cases}$

6. a) n=6000 veces, p=1/6, q=5/6.

aproximación DeMoivre-Laplace $P(k_1 \le \mathbf{X} \le k_2) \approx G\left(\frac{k_2 - np + 0.5}{\sqrt{npq}}\right) - G\left(\frac{k_1 - np - 0.5}{\sqrt{npq}}\right)$

$\eta = np = 1000,\ npq = 5000/6 \Rightarrow P(980 \le \mathbf{X} \le 1005) \approx G(0.19) - G(-0.71) = 0.3364$

b) $P(\mathbf{X} = 1005) = \binom{n}{1005} p^{1005} q^{n-1005} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(1005-\eta)^2}{2\sigma^2}} = 0.0136$ con $\eta = np$ y $\sigma^2 = npq$