Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

HOJA DE PROBLEMAS 2

1. Una v.a. continua tiene como fdp

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad x \in R$$

a) Obtener la función de distribución.
b) Obtener la probabilidad de los siguientes sucesos:
   b.1) $\{|\mathbf{X}| \leq 2 \text{ ó } \mathbf{X} \geq 0\}$
   b.2) $\{|\mathbf{X}| \leq 2 \text{ y } \mathbf{X} \leq -1\}$
   b.3) $\{|\mathbf{X}| + |\mathbf{X}-3| \leq 3\}$
   b.4) $\{\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2 - \mathbf{X} - 2 \leq 0\}$

2. Se dispone de 2 generadores A y B de números aleatorios de 36 bits. Los números que genera A son todos equiprobables, y lo mismo ocurre con los generados en B. Si se generan sendos números aleatorios en A y B, la probabilidad de que uno cualquiera de los dos sea igual a un número prefijado m es 2^{-35}. Se pide:

a) Razonar si los generadores A y B son independientes o no.
b) Se obtienen 10^{11} números aleatorios independientes con el generador A; calcule la probabilidad de que al menos uno sea igual a m.
c) Si se generan 10^{14} números independientes en A, calcule la probabilidad de que más de 1500 de ellos sean iguales a m.

3. En el laboratorio de electrónica de la universidad hay 20 puestos, cada uno de los cuales tiene una fuente de alimentación un tanto especial. De las 20 fuentes (todas ellas externamente idénticas), 8 son de tipo A y cuando se encienden proporcionan un valor de voltaje constante durante toda la sesión de prácticas, pero dicho valor es aleatorio y sigue una distribución uniforme entre 0 y 10 voltios. Las otras 12 fuentes (tipo B) funcionan exactamente igual, con la salvedad de que el valor de voltaje que proporcionan sigue una v.a. uniforme de media 10 voltios y varianza 3 voltios^2. Denotamos **X** a la v.a. voltaje (en voltios) de la fuente de alimentación de un alumno que elige aleatoriamente su puesto del laboratorio.

a) Especifique el rango de la variable aleatoria **X**. Calcule y dibuje la función densidad de probabilidad de **X**, $f_X(x)$.
b) Calcule la media de la variable aleatoria **X**.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la fuente de un alumno cualquiera proporcione más de 8 voltios?
d) Si un alumno observa que la tensión de la fuente es exactamente 8 voltios, ¿qué es más probable, que su fuente sea de tipo A o de tipo B?

Para realizar todas las prácticas el alumno usa un único dispositivo (siempre el mismo) que se estropea si se alimenta con más de 12 voltios.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que acabe el curso con el dispositivo estropeado teniendo en cuenta que tiene que acudir 10 veces al laboratorio y se le asigna aleatoriamente su puesto en el laboratorio?.¿Y si le garantizan que las 10 veces va a utilizar una fuente de tipo B?

4. Unos submarinistas regresan cada día a la posición en la que se encuentra un barco hundido. Debido a errores en la navegación, cada día llegan a un punto cuya distancia (en kilómetros) a la verdadera posición puede ser modelada mediante una v.a. **X** con función de distribución

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\frac{x^3}{2}}\right)u(x).$$

Si deben llegar con un error inferior a 1.2 Km para no tener que mover la posición de su barco y dentro de un radio de 0.6 Km para un aprovechamiento óptimo de las bombonas de oxígeno:

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprovechamiento óptimo de las bombonas dado que se encuentran lo suficientemente cerca del barco hundido para no tener que desplazar el suyo?
b) Obtenga $f_X(x|\mathbf{X} \leq 1.2\text{Km})$.

5. En cierta lotería se venden 100 boletos de un euro cada uno en cada sorteo que se realiza. Solo hay un boleto ganador que percibe la totalidad de la recaudación de cada sorteo. Suponga que dispone de 50 euros para gastar.

a) Para maximizar la probabilidad de ganar al menos un sorteo: ¿debería comprar 50 boletos en un solo sorteo o un boleto en 50 sorteos distintos?.
b) ¿Cuál de las dos estrategias anteriores le proporciona una mayor ganancia esperada (ganancia media)?. La ganancia esperada si se juega en M sorteos se puede calcular como $G_{Media} = \sum_{k=1}^{M} G_k p_k$, donde G_k es la ganancia que se obtiene al ganar en exactamente k sorteos y p_k es la probabilidad de ganar exactamente k sorteos.

6. Un sencillo juego consiste en extraer aleatoriamente una carta de la baraja española (de 40 cartas) y evaluar el número de intentos necesarios hasta obtener el "as de oros". Se define la v.a. **X** = "Número de extracciones hasta obtener el as de oros".

a) ¿Cuál es el rango de **X**, Ω_X?. Determine $P(\mathbf{X}=x_i)$ para todo $x_i \in \Omega_X$.
b) Repita el ejercicio considerando ahora que, cada vez que se extraiga una carta ésta no se repondrá a la baraja, es decir, tras cada extracción habrá una carta menos (y la que se retira no es, evidentemente, el as de oros).
c) Considere ahora que el experimento consistente en repetir 200 veces la extracción al azar de una carta de la baraja española y contabilizar el número de veces que se obtiene el as de oros. Calcule el rango y las probabilidades de la variable aleatoria resultante.

7. Un avión se aproxima en línea recta hacia un sistema radar. Este trata de detectarlo emitiendo pulsos y procesando sus ecos. La amplitud del eco correspondiente al pulso i-ésimo $\mathbf{X}_i$, se modela como una v.a. uniforme en el intervalo [0,ci] siendo c una constante positiva (esto es, la longitud del rango de la v.a. es proporcional al número de orden del pulso emitido), y cada eco es independiente de los demás. Los ecos se comparan sucesivamente con un umbral fijo u (siendo u<c) hasta que éste es superado en cuyo caso el avión queda detectado. Definiendo como **Y** la v.a. que representa el número de pulsos emitidos hasta que se produce la detección, se pide:

a) Calcular $P(\mathbf{Y}=k)$ para todo k y comprobar que su suma da 1.
b) Número medio de pulsos necesarios para detectar el avión.
c) Valor de la constante c que garantiza que el número medio de pulsos emitidos sea inferior a un valor n_0 dado.

8. La profundidad de penetración de un neutrón en un metal puede modelarse como una v.a. con distribución exponencial de parámetro 1 mm^{-1}.

a) Calcular la probabilidad de que un neutrón atraviese una lámina de 1 mm de espesor.
b) Si a continuación de dicha lámina se coloca otra del mismo grosor, ¿cuál es la probabilidad de que un neutrón que ha atravesado la primera lámina atraviese también la segunda?.
c) Un cuerpo radiactivo emite 1000 neutrones, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos atraviese una lámina de 7 mm de espesor?.
d) Si se conoce con seguridad que al menos un neutrón ha atravesado la lámina del apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que la hayan atravesado más de 2?.

9. Un transmisor emite impulsos de dos tipos. La amplitud de los impulsos tipo I sigue una fdp (Rayleigh): $f(x)=x\exp(-x^2/2)\,u(x)$. La amplitud de los impulsos tipo II sigue una fdp normal N(5,4). El receptor decide el tipo de impulso transmitido comparando la amplitud de cada impulso recibido con un umbral μ: si la amplitud es mayor que μ se decide que el impulso transmitido fue de tipo II; en caso contrario se decide que fue de tipo I.

a) Determinar el valor del umbral μ de forma que la probabilidad de equivocación al transmitir un impulso de tipo II sea de 0.1
b) Para el umbral obtenido en el apartado anterior, determinar la probabilidad de equivocación al transmitir un impulso del tipo I.
c) Si se transmiten N impulsos sucesivos de tipo II, ¿cuál es la probabilidad de que al menos M de ellos superen el umbral μ?. Obtener dicha probabilidad para N=5, M=4, y el valor del umbral μ calculado en el primer apartado.

10. Una red de cajeros automáticos está constituida por un ordenador central, al que están conectados una serie de terminales. Cuando un usuario, previa introducción de su tarjeta, desea realizar una operación, el cajero intenta conectarse a través de una línea con el ordenador central, el cual tarda un cierto tiempo en responderle, **T**, que depende de factores impredecibles. Si el cajero está situado en la misma población que el ordenador, **T** es aproximadamente una v.a. normal, de parámetros η y σ^2 si están en distinta población, **T** responde a una distribución con fdp: $f_T(t)=\alpha/2\exp(-\alpha|t-\mu|)$. El modo de funcionamiento del cajero es tal que, si al cabo de t_0 segundos el ordenador no ha dado respuesta alguna, se interrumpe la operación iniciada.

a) Si se sabe que la media y la varianza de **T** no dependen de la ubicación del cajero, determine los parámetros α y μ en función de η y σ^2.
b) Si t_0 se diseñó de forma que la probabilidad de que una operación se interrumpa dentro de la población sea de 0.01, calcule dicha probabilidad para un cajero situado fuera.
c) Si la red está formada por 2000 cajeros dentro de la población y 1000 fuera y se opera con 100 cajeros escogidos al azar, determine la probabilidad de que al menos uno no pueda realizar la operación requerida.

Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 2

---

1. a) $F_X(x) = \begin{cases} 1/2e^{x} & x \le 0 \\ 1 - 1/2e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

b) b.1) $P(\{|\mathbf{X}| \le 2\} \cup \{\mathbf{X} \ge 0\}) = 1-½e^{-2}$
b.2) $P(\{|\mathbf{X}| \le 2\} \cap \{\mathbf{X} \le -1\}) = ½(e^{-1}-e^{-2})$
b.3) $P(\{|\mathbf{X}| + |\mathbf{X}-3| \le 3\}) = ½(1-e^{-3})$
b.4) $P(\{\mathbf{X}^3-\mathbf{X}^2-\mathbf{X}-2 \le 0\}) = 1-½e^{-2}$

2. a) No son independientes
b) $n=10^{11}$, $p=2^{-36}$. $\mathbf{X}$:B(n,p) Aprox. de Poisson: Poisson(np) ➔ $P(\mathbf{X} \ge 1) \approx 1-e^{-np}=0.766$
c) Aproximación Gaussiana: N(np,npq) ➔ $P(\mathbf{X} > 1500) \approx 1 - G\left(\frac{1500 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

3. a) $\Omega_X = [0,13]$ voltios $\qquad f_X(x) = \begin{cases} 0.04, & \text{para } 0 \le x \le 7; \\ 0.14, & \text{para } 7 \le x \le 10; \\ 0.10, & \text{para } 10 \le x \le 13; \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

b) $E[\mathbf{X}] = 8$ voltios
c) $P(\mathbf{X}>8) = 0.58$
d) $P(A|\mathbf{X}=8) = 0.04/0.14 < P(B|\mathbf{X}=8) = 0.1/0.14$ ➔Es más probable que sea la fuente B
e) $\mathbf{Y}$ v.a. nº veces en que $\mathbf{X} \ge 12$ voltios en n =10 intentos.
$\mathbf{Y}$ es v.a. Binomial con n =10 y $p = P(\mathbf{X} \ge 12) = 0.1$
P("dispositivo roto al final de curso") = $P(Y \ge 1) = 1- P(Y=0) = 1-0.9^{10} = 0.6513$

Si fuente de tipo B entonces $p = P(\mathbf{X} \ge 12|B) = 1/6$
P("dispositivo roto al final de curso" |B) = $1-(1-1/6)^{10} = 0.8385$

4. a) $P(\mathbf{X} \le 0.6|\mathbf{X} \le 1.2)=F_X(0.6)/F_X(1.2)=0.1768$
b) $f_X(x \mid \mathbf{X} \le 1.2) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_X(1.2)} \dfrac{3}{2} x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} & 0 \le x \le 1.2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

5. a) Estrategia1: P_1("ganar al menos un sorteo") = 50/100 = 0.5
Estrategia2: $\mathbf{X}$ v.a. Binomial: n=50 p=P("ganar sorteo individual") = 1/100
P_2("ganar al menos un sorteo") =1-P($\mathbf{X}$=0) = $\binom{n}{0} p^0 q^n = 0.395$

b) $G_{Media\_1} = G_{Media\_2} = 50$ €

6. a) $\Omega_X = \{1,2,3,\ldots\} = N^+$ $\quad P(\mathbf{X}=k) = q^{k-1}p$ para $k=1,2,\ldots$ con p=1/40, q=1-p

b) $\Omega_Y = \{1,2,3,\ldots,40\}$ $\quad P(\mathbf{Y}=k) = p = 1/40$ para $k=1,2,\ldots,40$

c) **Z** es B(n=200,p=1/40)

$\Omega_Z = \{0,1,2,3,\ldots,200\}$ $\quad P(\mathbf{Z}=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ para $k=1,2,\ldots,n$

7. a) $P(\mathbf{Y}=k) = \left(\frac{u}{c}\right)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!}\left(1-\frac{u}{kc}\right)$ $\quad \Omega_Y = \{1,2,3,\ldots.\}$

b) $E[\mathbf{Y}] = \eta_Y = e^{u/c}$

c) $c > u/\ln(n_0)$

8. a) $P(\mathbf{X}>1mm) = e^{-1}$

b) $P(\mathbf{X}>2mm|\mathbf{X}>1mm) = P(\mathbf{X}>1mm) = e^{-1}$

c) **Y**: B(n,p) con n=1000 y $p=P(\mathbf{X}>7mm)=e^{-7}$

$$P(\mathbf{Y}\geq 1) = 1-\binom{n}{0}p^0q^n = 0.59844$$

$$\text{d) } P(Y>2\mid Y\geq 1) = \frac{P(Y\geq 3)}{P(Y\geq 1)} = \frac{1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)}{1 - P(Y=0)} =$$

$$\approx (\text{aprox. Poisson}) = \frac{1-e^{-a} - ae^{-a} - \frac{a^2}{2}e^{-a}}{1-e^{-a}} = 0.11$$

9. a) $P(\mathbf{X_{II}} \leq \mu) = G\left(\frac{\mu-5}{2}\right) = 0.1 \xrightarrow[\text{tablas}]{} \mu = 2.44$

b) $P(\mathbf{X_I} > \mu) = 0.05$

c) **Y**: B(N,p) con $p=P(\mathbf{X_{II}} > \mu)=0.9$

$$P(\mathbf{Y}\geq M) = \sum_{k=M}^{N}\binom{N}{k}p^kq^{N-k} \qquad N=5, M=4, \mu=2.44 \;\Rightarrow P(\mathbf{Y}\geq 4) = 0.92$$

10. **T**: tiempo de respuesta MP={“misma población”} DP={“distinta población”}

$f_T(t|MP) = N(\eta,\sigma^2)$ $\quad f_T(t|DP) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|t-\mu|}$

a) $\left.\begin{array}{l} E[\mathbf{T}\mid MP] = \eta \\ E[\mathbf{T}\mid DP] = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = \eta$ $\qquad \left.\begin{array}{l} Var[\mathbf{T}\mid MP] = \sigma^2 \\ Var[\mathbf{T}\mid DP] = 2/\alpha^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$

b) $t_0 = \eta + 2.33\sigma$

$$P(\mathbf{T} > t_0 \mid DP) = \frac{1}{2}e^{-\alpha(t_0-\mu)} = 0.0185$$

c) I={“Interrupción”}

X: B(n,p) con n=100 y p=P(I)=P(I|DP)P(DP)+P(I|MP)P(MP)=0.0128

$P(\mathbf{X}\geq 1) = 0.7255$