Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 2

1. a) $F_X(x) = \begin{cases} 1/2e^{x} & x \le 0 \\ 1 - 1/2e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

b) b.1) $P(\{|\mathbf{X}| \le 2\} \cup \{\mathbf{X} \ge 0\}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2}$
b.2) $P(\{|\mathbf{X}| \le 2\} \cap \{\mathbf{X} \le -1\}) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})$
b.3) $P(\{|\mathbf{X}| + |\mathbf{X}-3| \le 3\}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-3})$
b.4) $P(\{\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2 - \mathbf{X} - 2 \le 0\}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2}$

2. a) No son independientes
b) $n=10^{11}$, $p=2^{-36}$. $\mathbf{X}$:B(n,p) Aproximación de Poisson: P(np) ➔ $P(\mathbf{X} \ge 1) = 1 - e^{-np} = 0.766$
c) Teorema del Límite Central ➔ Aproximación Gaussiana:

$$N(np, \sqrt{npq}) \;➔\; P(\mathbf{X} > 1500) \approx 1 - G\left(\frac{1500 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

3. $\mathbf{X}$: v.a. demanda del producto
$\mathbf{G}$: v.a. ganancia
z: cantidad de aprovisionamiento (es el valor o parámetro a calcular)
$E[\mathbf{G}] = E[\mathbf{G}|\mathbf{X} \le z]P(\mathbf{X} \le z) + E[\mathbf{G}|\mathbf{X} > z]P(\mathbf{X} > z)$
$z_{óptimo} = \ln((a+b)/b)$

4. a) $P(\mathbf{X} \le 0.6 | \mathbf{X} \le 1.2) = F_X(0.6)/F_X(1.2) = 0.1768$

b) $f_X(x \mid \mathbf{X} \le 1.2) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_X(1.2)} \dfrac{3}{2} x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} & 0 \le x \le 1.2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

5. a) Estrategia1: P_1(“ganar al menos un sorteo”) = 50/100 = 0.5
Estrategia2: $\mathbf{X}$ v.a. Binomial: n=50 p=P(“ganar sorteo individual”) = 1/100

P_2(“ganar al menos un sorteo”) =1-P($\mathbf{X}$=0) =1-$\binom{n}{0} p^0 q^n$ = 0.395

b) $G_{M1} = G_{M2} = 50$ pts

6. a) $P(\mathbf{X} = k) = q^{k-1}p = \left(\dfrac{L-1}{L+1}\right)^{k-1}\left(\dfrac{2}{L+1}\right)$ para $k = 1,2,..n,...$ $\qquad E[\mathbf{X}] = \dfrac{L+1}{2}$

b) $P(\mathbf{Y} = k) = \dfrac{2(L-k+1)}{(L+1)L}$ para $k = 1,2,..,L$

c) $$\left.\begin{aligned} P(\mathbf{X} \le L/2) &= 1 - \left(\frac{L-1}{L+1}\right)^{L/2} \\ P(\mathbf{Y} \le L/2) &= \frac{3L+2}{4(L+1)} \end{aligned}\right\} \quad L = 10 \Rightarrow \begin{cases} P(\mathbf{X} \le 5) = 0.63 \\ P(\mathbf{Y} \le 5) = 0.73 \leftarrow \text{mejor} \end{cases}$$

7. a) $P(\mathbf{Y}=k)=\left(\frac{u}{c}\right)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}\left(1-\frac{u}{kc}\right) \quad \Omega_{\mathbf{Y}}=\{1,2,3,....\}$

b) $E[\mathbf{Y}] = \eta_{\mathbf{Y}} = e^{u/c}$

c) $c > u/\ln(n_0)$

8. a) $P(\mathbf{X}>1mm) = e^{-1}$

b) $P(\mathbf{X}>2mm|\mathbf{X}>1mm) = P(\mathbf{X}>1mm) = e^{-1}$

c) $\mathbf{Y}$: $B(n,p)$ con $n=1000$ y $p=P(\mathbf{X}>7mm)=e^{-7}$

$$P(\mathbf{Y}\geq 1)=1-\binom{n}{0}p^0q^n = 0.59844$$

$$d)\ P(Y>2\,|\,Y\geq 1)=\frac{P(Y\geq 3)}{P(Y\geq 1)}=\frac{1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)}{1-P(Y=0)}=$$

$$\approx (\text{aprox. Poisson}) = \frac{1-e^{-a}-ae^{-a}-\frac{a^2}{2}e^{-a}}{1-e^{-a}} = 0.11$$

9. a) $P(\mathbf{X}_{\mathbf{II}}\leq \mu)=G\left(\frac{\mu-5}{2}\right)=0.1 \xrightarrow[\text{tablas}]{} \mu = 2.44$

b) $P(\mathbf{X}_{\mathbf{I}}>\mu) = 0.05$

c) $\mathbf{Y}$: $B(N,p)$ con $p=P(\mathbf{X}_{\mathbf{II}}>\mu)=0.9$

$$P(\mathbf{Y}\geq M)=\sum_{k=M}^{N}\binom{N}{k}p^k q^{N-k} \qquad N=5, M=4, \mu=2.44 \ \Rightarrow P(\mathbf{Y}\geq 4)=0.92$$

10. **T**: tiempo de respuesta MP={“misma población”} DP={“distinta población”}

$f_{\mathbf{T}}(t|MP) = N(\eta,\sigma)$ $\quad f_{\mathbf{T}}(t|DP) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|t-\mu|}$

a) $\left.\begin{array}{l} E[\mathbf{T}\,|\,MP]=\eta \\ E[\mathbf{T}\,|\,DP]=\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \mu=\eta \qquad \left.\begin{array}{l} Var[\mathbf{T}\,|\,MP]=\sigma^2 \\ Var[\mathbf{T}\,|\,DP]=2/\alpha^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}$

b) $t_0 = \eta+2.33\sigma$

$$P(\mathbf{T}>t_0\,|\,DP)=\frac{1}{2}e^{-\alpha(t_0-\mu)}=0.0185$$

c) I={“Interrupción”}

$\mathbf{X}$: $B(n,p)$ con $n=100$ y $p=P(I)=P(I|DP)P(DP)+P(I|MP)P(MP)=0.0128$

$P(\mathbf{X}\geq 1) = 0.7243$