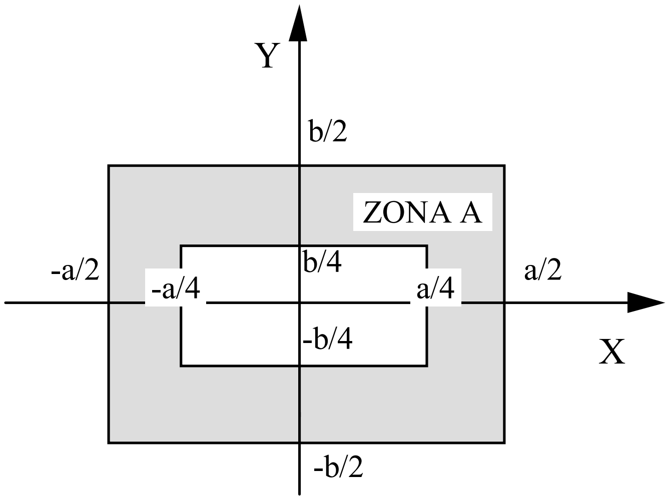
Universidad de Cantabria
ETSII Telecomunicación
2º Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Métodos Matemáticos para Telecomunicaciones

HOJA DE PROBLEMAS 5

1. Una v.a. bidimensional (**X**,**Y**) tiene una fdp de valor constante en la zona **A** de la figura y nulo en el resto.



a) Demostrar que las v.a.'s **X** e **Y** están incorreladas.
b) ¿Son **X** e **Y** independientes?
c) Se aplica la transformación: **Z**=**X**cos(θ)-**Y**sen(θ), **W**=**X**sen(θ)+**Y**cos(θ), siendo θ una constante real ($0 \leq \theta \leq 2\pi$); determinar el valor de esta constante para el cual la covarianza de las v.a.´s **Z** y **W** sea máxima.
d) Para la transformación del apartado anterior, calcular la relación que debe existir entre las constantes a y b para que la covarianza de las v.a.'s **Z** y **W** sea nula, independientemente del valor de θ.

2. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s cuyas medias son η_x y η_y, y sus desviaciones típicas σ_x y σ_y respectivamente. El coeficiente de correlación de las dos v.a.´s es r. Sobre **X** e **Y** se aplica la transformación **U**=**X**cos(θ)-**Y**sen(θ), **V**=**X**sen(θ)+**Y**cos(θ) siendo θ una constante real ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Se pide:
a) Determine el valor de θ que hace que las v.a.'s **U** y **V** estén incorreladas.
b) Suponga que **X** es $N(\eta_x,\sigma_x)$ e **Y** es $N(\eta_y,\sigma_y)$, siendo **X** e **Y** independientes; si sobre ellas se aplica la transformación anterior, determine las fdp's marginales de las v.a.'s **U** y **V**.

3. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en el intervalo (0,1) e independientes. Se forma la v.a. **U**=$(-2\ln \mathbf{X})^{1/2}$.
a) Calcular la fdp de la v.a. **U** y la fdp conjunta de **U** e **Y**.
b) Se definen las v.a.'s **Z**=**U**cos(2π**Y**), **W**=**U**sen(2π**Y**). Calcular las f.d.p.'s conjunta y marginales de las v.a.'s **Z** y **W**.

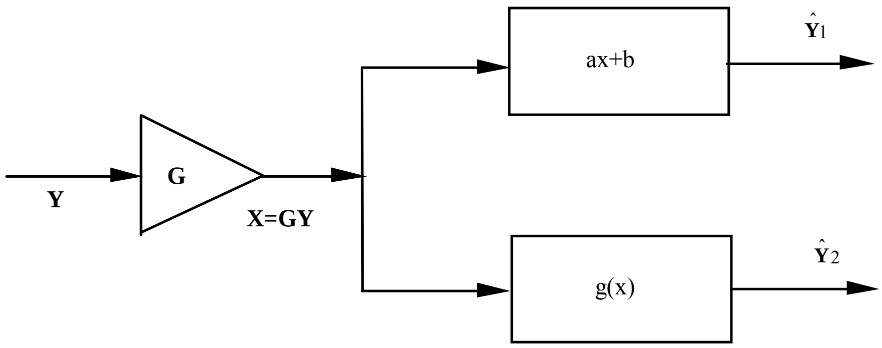
4. Un móvil avanza en línea recta en instantes discretos de tiempo; en cada instante tiene una probabilidad p de avanzar 1 metro y q =1-p de permanecer parado. Se consideran 2 instantes de tiempo consecutivos y se definen las v.a.'s **X**: "distancia avanzada sólo *en el primer* instante" e **Y** : "distancia avanzada en *los dos* instantes".

a) Obtener las probabilidades de los puntos del rango o recorrido de la v.a. bidimensional (**X**,**Y**) y las probabilidades marginales de **X** e **Y**. ¿Son estas v.a.'s independientes?

b) Calcular el coeficiente de correlación de **X** e **Y** y el estimador lineal óptimo de **Y** en función de **X**. ¿Son **X** e **Y** incorreladas?

c) Obtener el estimador óptimo (sin restricciones) de **Y** en función de **X**.

5. En el esquema de la figura, **Y** representa una tensión desconocida e inaccesible que sufre una atenuación también desconocida, **G**, de forma que sólo se puede obtener medidas de **X**=**GY**. Tanto **Y** como **G** pueden suponerse uniformes en (0,1) e independientes. Se trata de estimar **Y** a partir de **X** mediante los dos bloques de la figura:



a) Obtener las constantes a y b del bloque superior, de forma que $\hat{\mathbf{Y}}_1$ sea la estimación lineal de **Y** de mínimo error cuadrático medio.

b) Obtenga la función g(x) del bloque inferior que hace que $\hat{\mathbf{Y}}_2$ sea la estimación no lineal de **Y** de mínimo error cuadrático.

c) Calcule el coeficiente de correlación de **X** e $\hat{\mathbf{Y}}_1$ y la covarianza de **X** e $\hat{\mathbf{Y}}_2$.

6. Sean $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ dos v.a.'s $N(0,\sigma_1)$ y $N(0,\sigma_2)$ respectivamente, $(\sigma_1 > \sigma_2)$. Se forma la nueva v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}\mathbf{X}_1 + (1-\mathbf{Y})\mathbf{X}_2$ donde **Y** es una v.a. de Bernoulli de parámetro p ($\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e **Y** son independientes entre sí). Se pide:

a) La función densidad de probabilidad de **Z**.

b) La media y la varianza de **Z**.

c) A partir del conocimiento de $\mathbf{X}_2$, los estimadores lineal cuadrático medio óptimo y cuadrático medio óptimo sin restricciones de **Z**.

7. El tiempo en milisegundos necesario para transferir un archivo de datos desde una unidad de disco a la memoria central de un ordenador puede modelarse como una v.a. **Z**, que es de la forma **Z**=**X**+c**Y**, donde **X** es el tiempo que tarda la cabeza lectora en colocarse al principio del archivo, **Y** el tamaño en Kbytes de éste y c una constante. Supondremos **X** uniforme entre 30 y 50 ms, **Y** normal de media η_Y=100Kbytes, desviación típica σ_Y=10 Kbytes e independiente de **X** y c=0.5msg/Kbyte. Calcule:

a) La media y la varianza de **Z** y el coeficiente de correlación de **Y** y **Z**.

b) La fdp de **Z**.

c) Los estimadores lineal y no lineal óptimos (recta y línea de regresión respectivamente) de **Z** en función de **Y**.

.