

HOJA DE PROBLEMAS 4

1. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional cuya fdp conjunta viene dada por:

$$f_{XY}(x, y) = c(2x + y) \quad \text{en la región} \quad \begin{cases} 2 < x < 6 \\ 0 < y < 5 \end{cases}$$

Obtenga:

- a) la constante c
- b) las funciones de distribución marginales $F_X(x)$ y $F_Y(y)$
- c) las funciones densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
- d) $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- e) $P(X > 3)$
- f) $P(X + Y > 4)$
- g) la función de distribución conjunta.
- h) ¿son X e Y independientes?

2. Sean X e Y dos v.a.'s de Bernoulli independientes, con $P(X=1)=P(Y=1)=p$, $P(X=0)=P(Y=0)=q=1-p$. Se forma la v.a. $Z=X \oplus Y$, donde el símbolo \oplus denota la operación "OR exclusiva", definida en la siguiente tabla:

X	Y	$Z=X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- a) Demuestre que las v.a.'s X y Z no son, en general, independientes.
- b) Calcule la covarianza de las v.a.'s X y Z .
- c) Determine los posibles valores de p que hacen que X y Z estén incorreladas; para dichos valores de p , ¿son X y Z independientes?

3. Sea la v.a. bidimensional (X, Y) continua con fdp conjunta de valor constante en la región del plano dada por

$$R = \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

y nula en el resto. Obtenga $F_{XY}(x, y)$, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$.

4. Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo $(0,T)$ y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre a la derecha del anterior, y se definen las v.a.'s **X**: "posición del primer punto" e **Y**: "distancia del segundo al primero".

a) Demuestre que la fdp conjunta de las v.a.'s **X** e **Y** es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{T(T-x)} \begin{cases} 0 < x < T \\ 0 < y < T-x \end{cases}$$

b) ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

c) Calcule $P(Y < X)$.

5. Dadas las v.a.'s continuas **X** e **Y**, se sabe que **X** es uniforme en $(0,1)$ y la $f_Y(y|x)$ no depende de y si se verifica $-x < y < x$, anulándose fuera de dicho recinto.

Calcular:

a) La fdp conjunta, $f_{XY}(x,y)$, dibujando el rango de dicha v.a. bidimensional.

b) $E(\mathbf{XY})$.

c) La fdp marginal de y , $f_Y(y)$. ¿Están **X** e **Y** incorreladas?

6. Sea (\mathbf{X},\mathbf{Y}) una variable bidimensional con función densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)=K$ en la región del espacio siguiente: $R=\{y>0, x^2+y^2<1\}$. Se pide:

a) Dibuje el rango de la variable bidimensional (\mathbf{X},\mathbf{Y}) y determine el valor de la constante K .

b) Calcule la función densidad de probabilidad marginal $f(x)$ y la condicional $f(y|x)$. ¿Son **X** e **Y** independientes?

c) Calcule $E[\mathbf{XY}]$ y obtenga la probabilidad $P(0.5 < x^2 + y^2 < 1)$.