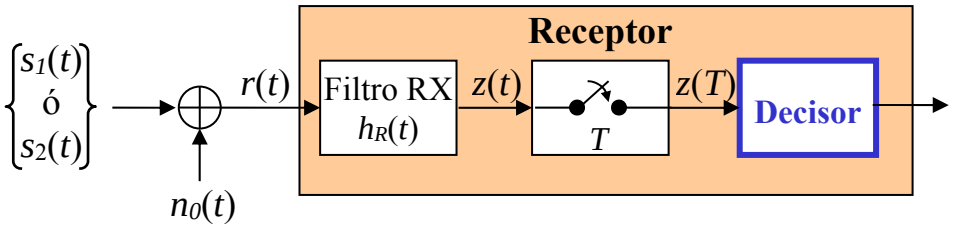
Tema 7. Detección de Señales Digitales en Ruido: Desarrollos Teóricos

Comunicaciones
Universidad de Cantabria

Este documento contiene los desarrollos teóricos y matemáticos relativos a diversos apartados del Tema 7. Detección de señales digitales en ruido.

7.2.1 El Criterio MAP para la detección de señales binarias



Señal tras el filtro:

S_1={"transmito $s_1(t)$"} ➔ $z(t) = s_1(t) \ast h_R(t) + n_0(t) \ast h_R(t) = a_1(t) + n(t)$

S_2={"transmito $s_2(t)$"} ➔ $z(t) = s_2(t) \ast h_R(t) + n_0(t) \ast h_R(t) = a_2(t) + n(t)$

Observables[1]:

$z(T)|S_1 = a_1(T) + n(T)$

$z(T)|S_2 = a_2(T) + n(T)$

El Criterio de Mínima Probabilidad de Error es

$$P(S_1 \mid z) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(S_2 \mid z),$$

donde $P(S_i|z)$ es la probabilidad de que el símbolo transmitido sea $s_i(t)$ cuando el observable ha resultado valer z. Gracias al Teorema de Bayes, estas probabilidades condicionales se pueden expresar como

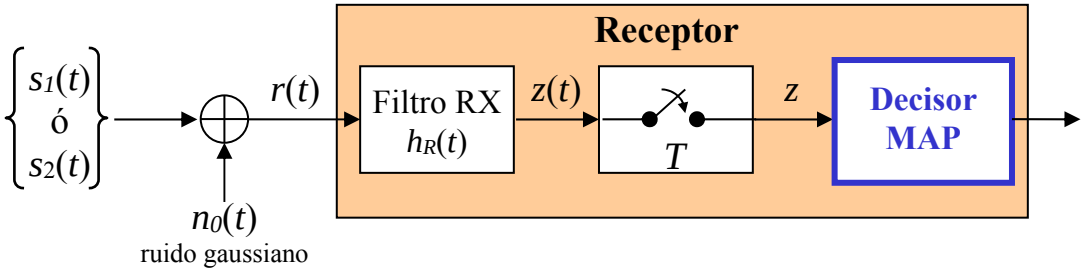
$$P(S_1 \mid z) = \frac{f_Z(z \mid S_1)P(S_1)}{f_Z(z)} \text{ y } P(S_2 \mid z) = \frac{f_Z(z \mid S_2)P(S_2)}{f_Z(z)};$$

resultando el denominado Criterio MAP (Máximo A Posteriori o criterio de mínima probabilidad de error):

$$\boxed{\frac{f_Z(z \mid S_1)}{f_Z(z \mid S_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = \lambda}$$

[1] En adelante, para representar el valor de los observables en el instante $t = T$ se empleará la notación abreviada z, a_1, a_2, n en lugar de $z(T)$, $a_1(T)$, $a_2(T)$, $n(T)$

7.2.2 Particularización del Criterio MAP



Bajo las siguientes condiciones:

- Señales Binarias equiprobables: $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$
- Ruido Gaussiano: $N(0,\sigma_n^2)$

podemos conocer la fdp de los observables

$$z|S_1 = a_1 + n \Rightarrow f_Z(z|S_1) = N(a_1,\sigma_n^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

$$z|S_2 = a_2 + n \Rightarrow f_Z(z|S_2) = N(a_2,\sigma_n^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

Operando con la expresión del Criterio MAP

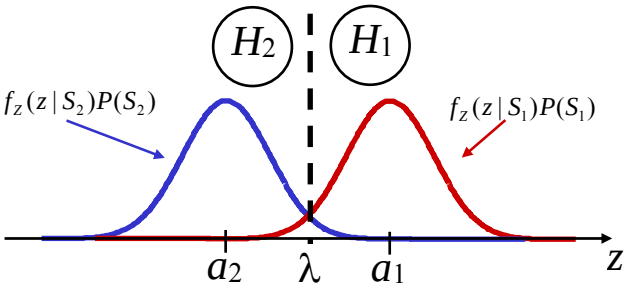
$$\frac{e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_n^2}}} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = 1,$$

y tomando logaritmos

$$-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_n^2} \gtrless 0,$$

resulta

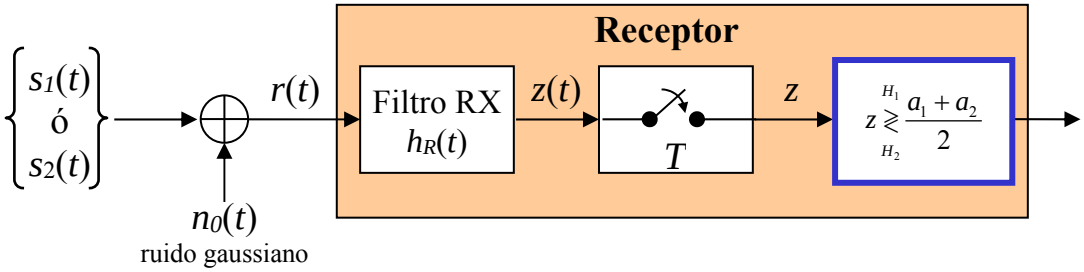
$$\boxed{z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_1 + a_2}{2} = \lambda}$$



En general, si los símbolos no son equiprobables ($P(S_1) = p_1 \neq P(S_2) = p_2$) entonces el criterio MAP toma la forma

$$z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma_n^2}{(a_1 - a_2)} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right).$$

7.2.3 Probabilidad de error



Bajo las siguientes condiciones

- Señales binarias equiprobables: $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$
- Ruido Gaussiano: $N(0, \sigma_n^2)$
- Decisor óptimo: $\lambda = (a_1+a_2)/2$

la probabilidad de error es

$$P(error) = P(e \mid S_2)P(S_2) + P(e \mid S_1)P(S_1),$$

donde[2]

$$P(e \mid S_2) = P(z > \lambda \mid S_2) = \int_{\lambda}^{\infty} f_Z(z \mid S_2)dz = Q\left(\frac{\lambda - a_2}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_n}\right),$$

$$P(e \mid S_1) = P(z < \lambda \mid S_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_Z(z \mid S_1)dz = 1 - \int_{\lambda}^{\infty} f_Z(z \mid S_1)dz$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\lambda - a_1}{\sigma_n}\right) = 1 - Q\left(\frac{a_2 - a_1}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_n}\right),$$

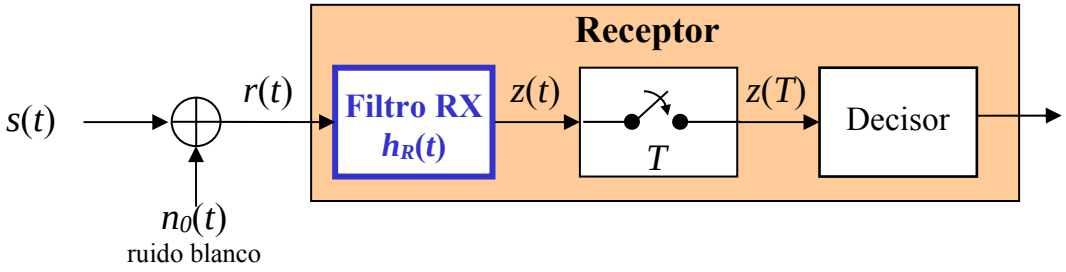
resultando

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)}$$

[2] $Q(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-u^2}{2}} du$

$Q(-x) = 1 - Q(x)$

7.3.2 Deducción matemática del filtro adaptado



Objetivo: buscar filtro receptor, $h_R(t)$, que maximice $\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a^2}{\sigma_n^2}$.

Respecto al observable, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{r} a(t) = s(t) * h_R(t) \\ A(f) = S(f)H_R(f) \end{array}\right\} \Rightarrow a(t) = TF^{-1}\{A(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f)S(f)e^{j2\pi ft}df \ .$$

$$a = a(T) = a(t)\,|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f)S(f)e^{j2\pi fT}df \ .$$

Respecto al ruido, que es blanco con DEP $N_0/2$:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\, df \ .$$

La relación señal-ruido a la entrada del decisor en el instante T resulta

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a^2}{\sigma_n^2} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(f)S(f)e^{j2\pi fT}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\, df} \ .$$

El filtro que maximiza la expresión anterior tiene por respuesta frecuencial[3]

$$H_R(f) = k\left(S(f)e^{j2\pi fT}\right)^* = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \ ,$$

y por respuesta la impulso

$$\boxed{h_R(t) = ks(T-t)}$$

Este es el denominado filtro adaptado, que proporciona la máxima relación señal a ruido a su salida en el instante T. Dicha relación señal a ruido máxima toma el valor

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{T\,MAX} = \frac{k^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df\right)^2}{k^2\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df} = \frac{2E_s}{N_0}, \qquad \text{donde } E_s = \int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \ .$$

Notar que la constante k no afecta a la relación S/N, por lo que puede emplearse el valor que convenga.

---

[3] Desigualdad de Schwarz: $\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \le \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$.

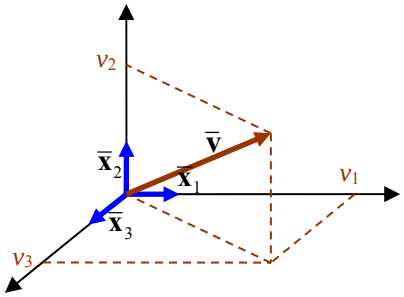
La igualdad se cumple si $f(x) = kg^*(x)$.

7.6 Espacio de Señal

Espacio Vectorial N dimensional

Representación de un vector en el espacio:

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{N} v_j \bar{\mathbf{x}}_j \,,$$



donde

v_j : Coordenada j-ésima del vector $\bar{\mathbf{v}}$.

$\bar{\mathbf{x}}_j$: Vector base según el eje j.

- Producto interno: $\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 = \sum_{j=1}^{N} v_{1j} v_{2j}$ $\Rightarrow$ Producto escalar (proyección)
- Norma: $\|\bar{\mathbf{v}}\| = (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}})^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} v_j^2}$ $\Rightarrow$ Longitud vector (distancia al origen)
- Ortogonalidad: $\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 = 0$ $\Rightarrow$ Vectores perpendiculares

Una base ortonormal N dimensional $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_N)$ está formada por N vectores de norma unitaria y ortogonales entre sí.

La coordenada j-ésima de un vector se obtiene proyectándolo sobre la base j-ésima

$$v_j = \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_j$$

El vector queda definido por sus coordenadas $\bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$.

7.6.1 Ortogonalización de Gram-Schmidt

Partiendo de un conjunto de M señales $\{s_1(t), s_2(t),\ldots, s_M(t)\}$, obtener una base ortonormal $\{\psi_1(t), \psi_2(t),\ldots, \psi_N(t)\}$ de dimensión $N \leq M$ en la cual se puedan representar las M señales originales.

Método:

1. Se escoge una de las señales de partida (por ejemplo $s_1(t)$) y se normaliza:
$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|} = \frac{s_1(t)}{\left\|\int s_1^2(t)dt\right\|}.$$
2. Se escoge otra de las señales de partida (por ejemplo $s_2(t)$).
   2.1. Se obtiene su proyección sobre $\psi_1(t)$:
$$a_{21} = \int s_2(t)\psi_1(t)dt.$$
   2.2. Se obtiene una señal ortogonal a $\psi_1(t)$:
$$g_2(t) = s_2(t) - a_{21}\psi_1(t).$$
   2.3. Se normaliza el resultado:
$$\psi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|} = \frac{g_2(t)}{\left\|\int g_2^2(t)dt\right\|}.$$
3. Se escoge otra de las señales de partida (por ejemplo $s_i(t)$).
   3.1. Se obtiene su proyección sobre las bases ya calculadas:
$$a_{ij} = \int s_i(t)\psi_j(t)dt.$$
   3.2. Se obtiene una señal ortogonal a las bases ya calculadas:
$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\psi_j(t).$$
   3.3. Si $g_i(t) = 0$ se reinicia el paso 3 con otra señal.
   3.4. Se normaliza el resultado:
$$\psi_i(t) = \frac{g_i(t)}{\|g_i(t)\|} = \frac{g_i(t)}{\left\|\int g_i^2(t)dt\right\|}.$$
4. Se repite el paso 3 hasta que no queden más señales de partida, resultando la base ortonormal $\{\psi_1(t), \psi_2(t),\ldots, \psi_N(t)\}$.