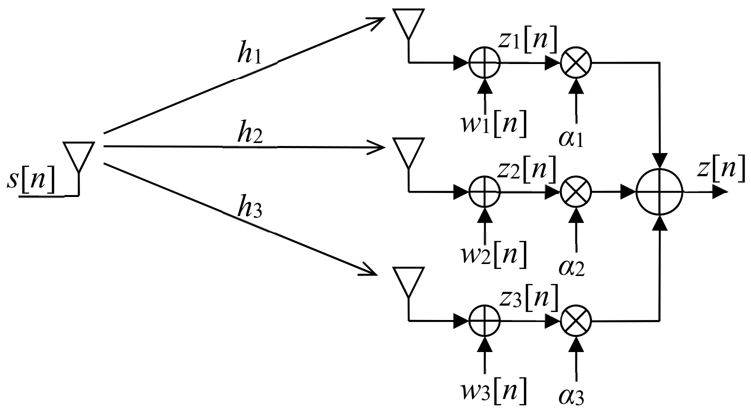
Comunicaciones Digitales
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

Problemas Tema 3

1. Considere un transmisor que emplea modulación QPSK, un canal AWGN (es decir, sin desvanecimiento) y un receptor con N_R ramas cada una de las cuales tiene una SNR promedio de 10dB.

a) Calcular la probabilidad de error de bit para un receptor con una única rama.
b) Calcular el número de ramas en el receptor MRC para obtener una probabilidad de error inferior a 10^{-6}.

2. Un sistema SIMO con una antena en transmisión y tres antenas en recepción se enfrenta a un canal <u>invariante</u> y <u>plano en frecuencia</u> cuya respuesta es $\boldsymbol{h}=[1\ ,\ 0.4e^{j\pi/2},\ 0.8e^{j\pi}]^T$. El receptor posee la estructura presentada en la figura, donde puede considerar que la potencia de la señal transmitida, $s[n]$, es unitaria y que la potencia de ruido AWGN en cada rama es $\sigma_{w_i}^2 = \sigma^2$.

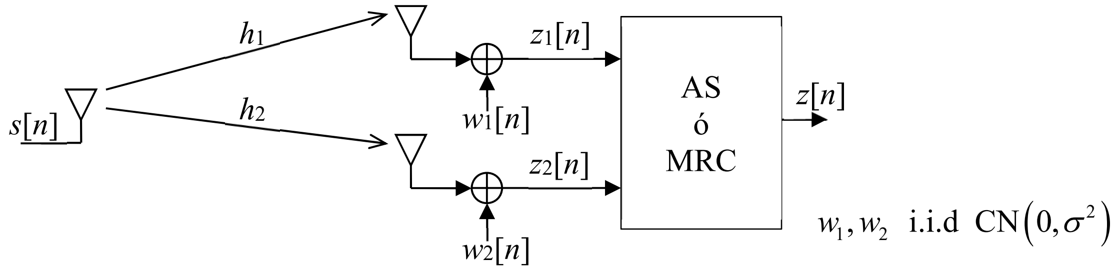


a) Si se fijan los coeficientes al valor α_i = 1, ¿Qué SNR se obtiene a la salida del combinador?
b) ¿Y si se utilizan los coeficientes del criterio MRC?
c) En las condiciones del problema razone qué tipo de ganancia (array, diversidad, multiplexado) se obtiene en los dos apartados anteriores.

3. Considere un transmisor QPSK con una sola antena, un canal AWGN (es decir, sin desvanecimiento) y un receptor con tres ramas cuyas respectivas relaciones señal a ruido son SNR_1=10dB, SNR_2=13dB y SNR_3=6dB.

a) Calcule la probabilidad de error de bit del receptor MRC.
b) Calcule la probabilidad de error de bit del receptor si emplea el criterio de selección de antena (*antenna selection*).
c) En las condiciones del problema, discuta si se obtiene ganancia en diversidad y/o ganancia de multiplexado.

4. Considere el sistema discreto equivalente de la figura en el que la potencia de los símbolos QPSK transmitidos es $P_s = 2$ Vatios y la varianza de ruido es $\sigma^2 = 0.2$ Vatios.



El canal SIMO se modela mediante h_1 y h_2, dos variables aleatorias <u>independientes</u> que se caracterizan por tomar únicamente dos posibles valores equiprobables:

$$h_1 = \begin{cases} \sqrt{0.4}e^{j\pi/3}, & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \sqrt{1.6}e^{-j\pi/4}, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{cases} \sqrt{0.8}e^{j\pi}, & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \sqrt{1.2}e^{j\pi/2}, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

Para la técnica de Selección de Antena (AS)

a) Calcule los posibles valores de SNR (y su probabilidad) de la señal z[n].
b) Para dichos valores de SNR, calcule la BER. ¿Qué BER promedio se obtiene?
c) Si el sistema sólo puede funcionar con BER inferiores a 10^{-4}, determine la *probabilidad de outage*[1] (probabilidad de que la BER sea superior a 10^{-4}).
d) Repita los apartados anteriores para la técnica Maximal Ratio Combining (MRC).
e) Calcule la ganancia de array del sistema (con AS y MRC) ante el canal propuesto. Discuta que otro(s) tipo(s) de ganancia(s) se obtiene(n) o no.

5. Un sistema QPSK sufre desvanecimiento Rayleigh y presenta una SNR promedio de 16dB. Si consideramos que, en esta aplicación concreta, la mínima probabilidad de error admisible es $BER_{out}=10^{-2}$, calcule la probabilidad de outage en los siguientes casos:

a) Sistema con antena única en transmisor y receptor.
b) Sistema con MRC en recepción (N_R=2).
c) Sistema con Alamouti (N_T=2).

[1] Se define la probabilidad de "outage" (de corte o fuera de servicio) de un receptor como la probabilidad de que dicho receptor proporcione una probabilidad de error de bit superior a un valor, BER_{out}, por encima del cual el sistema no es útil, es decir, $P(\text{BER} > \text{BER}_{\text{out}})$.

6. Un transmisor QPSK equipado con una única antena emite 100 mW. El receptor dispone de tres antenas que experimentan canales h_1, h_2 y h_3 i.i.d. con dos posibles estados cuyas probabilidades son

$$\left.\begin{aligned} P\left(\left|h_k\right|^2 = A = 10^{-7}\right) &= p = 0.8 \\ P\left(\left|h_k\right|^2 = B = 10^{-8}\right) &= q = 1 - p = 0.2 \end{aligned}\right\} \text{ para } k = 1,2,3.$$

La varianza de ruido en cada rama del receptor es σ^2 = 1 nW.

a) ¿Cuál es la relación señal a ruido promedio, $\overline{SNR_{AS}}$, resultante empleando el criterio antenna selection? ¿Y la BER promedio resultante?
b) Determine la probabilidad de corte (outage) al usar el criterio AS si la BER máxima de funcionamiento es $6{\cdot}10^{-2}$.
c) Razone si con el criterio MRC obtendría mejor o peor probabilidad de outage que con el criterio AS.
d) Determine la ganancia en array del receptor MRC y su SNR promedio.

7. Una torre de control con una única antena omnidireccional precisa comunicarse con un avión de reconocimiento que lleva instaladas dos antenas (también omindireccionales) en el fuselaje. Dada la elevada altitud de los vuelos, se considera que siempre existe línea de vista (LOS: *line-of-sight*) entre la torre de control y el aparato, salvo por la ocultación que sufre una de las dos antenas a bordo por la propia estructura del avión.

Por ello, se puede considerar que:

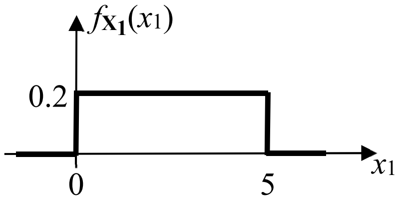
- La probabilidad de que la antena 1 posea LOS es del 50%. Idem para la antena 2
- La probabilidad de que la antena 1 sufra NLOS (*non-line-of-sight*) es del 50%. Idem para la antena 2
- Cuando una antena está en LOS, la otra está en NLOS (y viceversa)

En el límite de la cobertura del sistema, la amplitud del canal discreto equivalente toma los valores $|h_{LOS}|=1\cdot 10^{-6}$, $|h_{NLOS}|=1\cdot 10^{-7}$.

El transmisor de la torre de control emplea una modulación QPSK con filtros en raíz cuadrada de coseno alzado (roll-off=0.5), un régimen binario de 10 Mbit/s y una potencia de 80W. El receptor es capaz de estimar el canal en cada momento y cada una de sus ramas está afectada por AWGN con $N_0 = 10^{-18}$ W/Hz a la entrada del decisor.

a) Calcule la SNR promedio y la probabilidad de error de bit promedio de un receptor equipado con una sola antena.
b) Si se emplea la técnica de selección de antena (AS) en el receptor, calcule la SNR promedio y la BER promedio resultantes. Calcule la posible ganancia en array. ¿Qué otro tipo de ganancia(s) (si es que existe alguna) proporciona esta técnica multiantena en este escenario? Razónelo.
c) Se le ocurre alguna técnica que mejore las prestaciones del apartado anterior. Si es así, justifíquelo numéricamente y razone si merece la pena.
d) Justifique si podría considerar correcto el modelo de canal empleado en el problema en el supuesto de que la desviación típica de la dispersión temporal del canal (delay spread) fuera de 500ns.

8. Un sistema con dos antenas en recepción emite 1 Mbit/s empleando modulación QPSK con una potencia de 1 vatio en la única antena transmisora. En el receptor, el canal discreto equivalente SIMO, $\vec{h} = [h_1, h_2]$, se modela mediante dos variables aleatorias uniformes <u>independientes</u> e idénticamente distribuidas $\mathbf{X_1}=|h_1|^2$ y $\mathbf{X_2}=|h_2|^2$. En la figura se muestra la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $\mathbf{X_1}$.



La varianza de ruido AWGN discreto equivalente en ambas ramas del receptor es igual a 0.5 vatios.

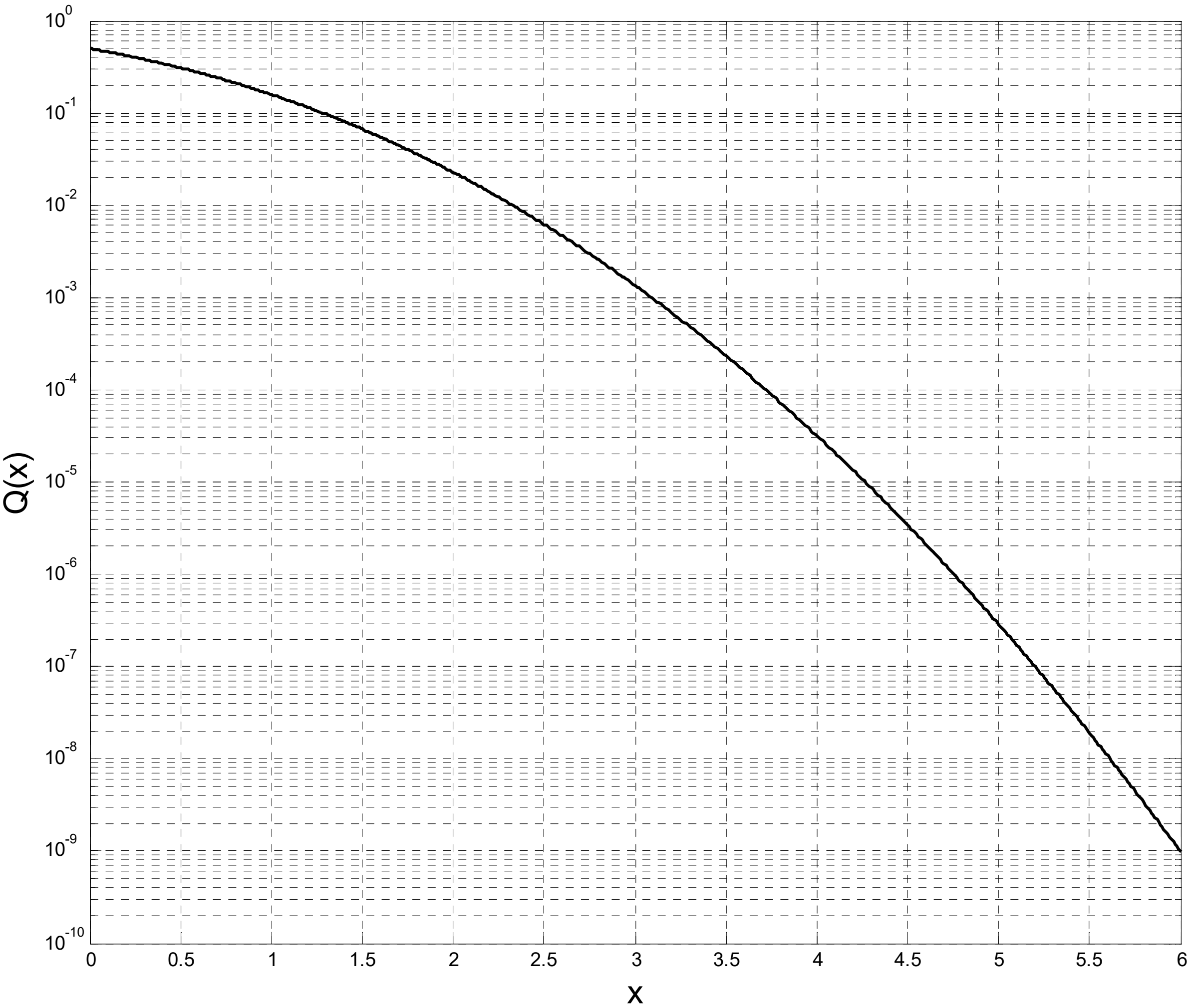
a) Calcule el valor de la densidad espectral de potencia del ruido en la rama 1. Calcule el valor promedio de la Energía media de bit recibida en la rama 1. No olvide en ningún caso las unidades.
b) Determine la ganancia en array que se obtiene al utilizar la técnica MRC (*Máximal Ratio Combining*).
c) Si el sistema no funciona (situación de corte o *outage*) con probabilidades de error de bit superiores a $2 \cdot 10^{-2}$, determine la probabilidad de *outage* tanto al emplear la técnica MRC como AS (*Antenna Selection*).
d) Calcule cuantas antenas serían necesarias con el criterio AS para obtener una probabilidad de *outage* menor o igual que la del sistema MRC con dos antenas del apartado anterior.
e) Razone, para ambas técnicas, si el receptor está obteniendo o no ganancia en diversidad.

Pista: $\{ \max(A,B) \leq \gamma \} = \{ A \leq \gamma \} \cap \{ B \leq \gamma \}$

Función Q

X v.a. Gaussiana con media nula y varianza unitaria: $\mathbf{X} \sim N(0,1)$

$$Q(x) = 1 - G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathbf{qfunc}(x)$$



Canal con desvanecimiento Rayleigh

- Realizaciones del canal complejo:

$$\mathbf{H} \sim CN\left(0,\sigma^2\right)$$

- Ganancia en amplitud:

$$\mathbf{R} = \left|\mathbf{H}\right| \sim Rayleigh \quad f_{\mathbf{R}}(r) = \frac{2r}{\sigma^2} e^{-r^2/\sigma^2} \text{para } x \geq 0$$

- Ganancia en potencia:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^2 = \left|\mathbf{H}\right|^2 \sim Exponencial \quad \begin{array}{l} f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-x/\sigma^2} \text{para } x \geq 0 \\ F_{\mathbf{X}}(x) = 1 - e^{-x/\sigma^2} \text{para } x \geq 0 \end{array}$$

- Ganancia en potencia promedio:

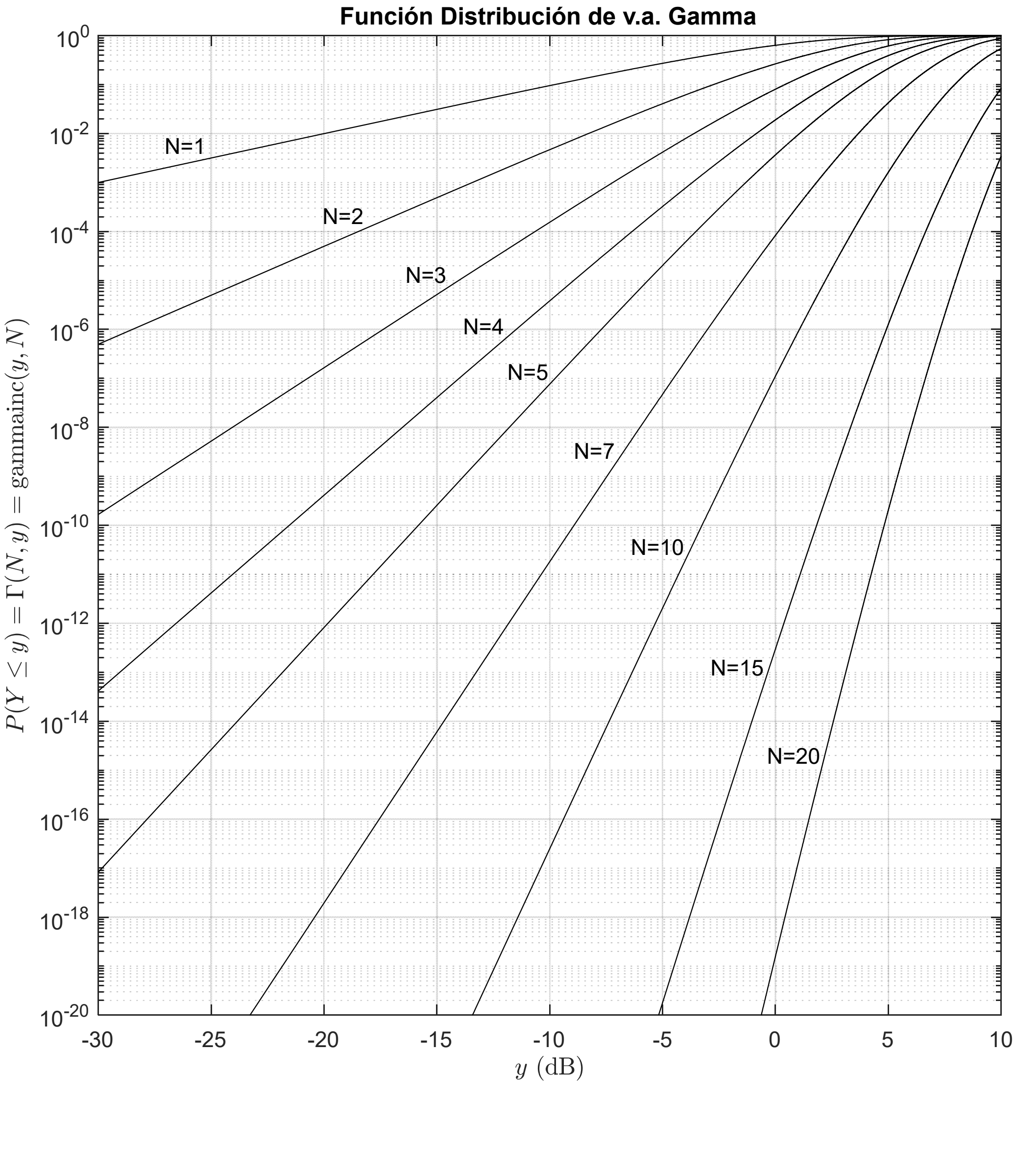
$$E\left[\left|\mathbf{H}\right|^2\right] = E\left[\mathbf{R}^2\right] = E\left[\mathbf{X}\right] = \sigma^2$$

Suma de *N* variables aleatorias independientes exponenciales

$$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_N \sim \text{i.i.d. } CN\left(0,\sigma^2\right) \Rightarrow \mathbf{X}_k = \left|\mathbf{H}_k\right|^2 \sim \text{ i.i.d. } Exponencial \text{ con } E\left[\mathbf{X}_k\right] = E\left[\left|\mathbf{H}_k\right|^2\right] = \sigma^2$$

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^{N} \left|\mathbf{H}_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{X}_k \sim Gamma(0, \sigma^2, N)$$

$$F_{\mathbf{Y}}(y) = \Gamma\left(N, \frac{y}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\left(N-1\right)!} \int_0^{y/\sigma^2} t^{N-1} e^{-t} dt = \textbf{gammainc(}y/\sigma^2\textbf{,} N\textbf{)}$$



Comunicaciones Digitales
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

Soluciones Problemas Tema 3

1.

a) $P_e^{SISO}(bit) = Q\left(\sqrt{10}\right) \approx 8 \cdot 10^{-4}$

b) $N_R = 3$ antenas receptoras

2.

a) SNR $= 0.2/(3\sigma^2)$
b) $\text{SNR}_{\text{MRC}} = 1.8/\sigma^2$
c) En a) ninguna ganancia. En b) sólo ganancia en array

3.

a) $P_e^{MRC}(bit) = Q\left(\sqrt{34}\right) \approx 3 \cdot 10^{-9}$

b) $P_e^{AS}(bit) = Q\left(\sqrt{20}\right) \approx 3 \cdot 10^{-6}$

c) No hay ganancia en diversidad ni de multiplexado

4.

a) $SNR_{AS} = \begin{cases} 8, & prob.\ 1/4, \\ 12, & prob.\ 1/4, \\ 16, & prob.\ 1/2, \end{cases}$ b) $BER_{AS} = \begin{cases} Q(\sqrt{8}), & prob.\ 1/4, \\ Q(\sqrt{12}), & prob.\ 1/4, \\ Q(\sqrt{16}), & prob.\ 1/2, \end{cases}$

$E[BER_{AS}] \approx 6.7 \cdot 10^{-4}$

c) $P(outage_{AS}) = 1/2$

d) $SNR_{MRC} = \begin{cases} 12, & prob.\ 1/4, \\ 16, & prob.\ 1/4, \\ 24, & prob.\ 1/4, \\ 28, & prob.\ 1/4, \end{cases}$ $BER_{MRC} = \begin{cases} Q(\sqrt{12}), & prob.\ 1/4, \\ Q(\sqrt{16}), & prob.\ 1/4, \\ Q(\sqrt{24}), & prob.\ 1/4, \\ Q(\sqrt{28}), & prob.\ 1/4, \end{cases}$

$E[BER_{MRC}] \approx 7 \cdot 10^{-5}$ $P(outage_{MRC}) = 1/4$

e) $GArray_{AS} = 1.3,\ GArray_{MRC} = 2.$
En ambos casos hay ganancia de array y en diversidad, pero no de multiplexado.

5.

a) $P(outage_{SISO}) = 1 - e^{\frac{2.3^2}{40}} = 1.2 \cdot 10^{-1}$ ***gammainc(2.3^2/40,1)***

b) $P(outage_{MRC}) = 1 - \left(1 + \frac{2.3^2}{40}\right) e^{\frac{2.3^2}{40}} = 8 \cdot 10^{-3}$ ***gammainc(2.3^2/40,2)***

c) $P(outage_{Alamouti}) = 1 - \left(1 + \frac{2 \cdot 2.3^2}{40}\right) e^{\frac{2 \cdot 2.3^2}{40}} = 3 \cdot 10^{-2}$ ***gammainc(2*2.3^2/40,1)***

6.

a) $E[SNR_{AS}] = q^3 \dfrac{P_{TX}B}{\sigma^2} + (1-q^3)\dfrac{P_{TX}A}{\sigma^2} = 9.928$

$E[BER_{AS}] = q^3 Q\left(\sqrt{\dfrac{P_{TX}B}{\sigma^2}}\right) + (1-q^3)\left(\sqrt{\dfrac{P_{TX}A}{\sigma^2}}\right) \approx 2 \cdot 10^{-3}$

b) $P(outage_{AS}) = q^3 = 8 \cdot 10^{-3}$

c) $P(outage_{MRC}) = 0$

d) $E[SNR_{MRC}] = 24.6 = 13.9$ dB, $G_{Array_{MRC}} = 3$

7.

a) $E[SNR_1] = \frac{1}{2}16 + \frac{1}{2}0.16 = 8.08$, $E[BER_1] = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{16}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{0.16}\right) \approx 0.15$

b) $E[SNR_{AS}] = 16 = 12$ dB, $E[BER_{AS}] = Q\left(\sqrt{16}\right) \approx 3.2{\cdot}10^{-5}$, $G_{Array_{AS}} = 1.98$
También proporciona ganancia en diversidad

c) $E[SNR_{MRC}] = 16.16$, $E[BER_{MRC}] \approx 2.9 \cdot 10^{-5}$, $G_{Array_{MRC}} = 2$

d) Como $\mathrm{W} = 7.5$ MHz $>$ $\mathrm{Bc} = 2$ MHz, entonces el canal no es plano (es selectivo en frecuencia), pero en todo el tema se asume canal plano.

8.

a) $N_0 = \dfrac{\sigma^2}{R_b/2} = 1\ \mu$W/Hz, $E[E_{b_{RX}}] = \dfrac{P_{TX}}{R_b}E[|h_1|^2] = 2.5\ \mu$Julios

b) $G_{Array_{MRC}} = 2$

c) $P(outage_{MRC}) = P(SNR_{MRC} < 4) = P(SNR_1 + SNR_2 < 4) = 8 \cdot 10^{-2}$

$P(outage_{AS}) = P(SNR_{AS} < 4) = P(SNR_1 < 4)P(SNR_2 < 4) = 1.6 \cdot 10^{-1}$

d) $N_R = 3$ antenas receptoras

e) El receptor obtiene ganancia en diversidad en ambos casos.