COMUNICACIONES DIGITALES

3er curso Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Mención en Sistemas de Telecomunicación

Universidad de Cantabria

Tema 2. Canales variantes y selectivos

Jesús María Ibáñez Díaz

GRUPO DE TRATAMIENTO AVANZADO DE SEÑAL (G.T.A.S.)

gtas.unican.es

Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Índice

Tema 2. Canales con desvanecimiento y selectivos

2.1 Tipos de Canales

Tipos de canales

Considerando el canal como caja negra:

¿Cambia con el tiempo?

- **No: Canal invariante, estacionario**
- **Si: Canal variante, no estacionario, sufre desvanecimiento (fading)**

¿Cómo es su respuesta en frecuencia?

- **Plana: Canal no selectivo en frecuencia, no dispersivo, sin memoria**
- **No plana: Canal selectivo en frecuencia, dispersivo, con memoria**

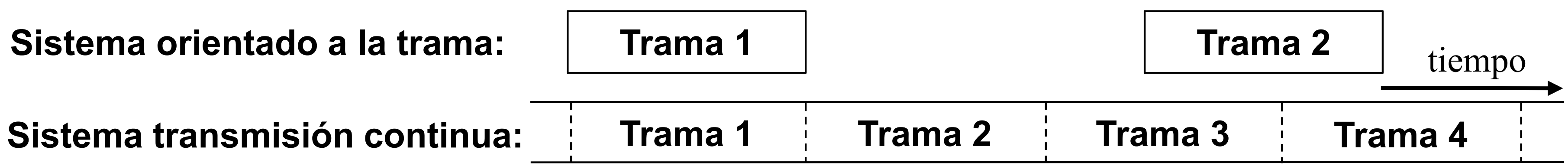
¿En qué medida un canal es invariante?

Depende del tiempo de coherencia del canal, T_c, pero es relativo al periodo de símbolo (y al periodo de trama)

Estrictamente hablando, un canal es invariante si no cambia con el tiempo (Tiempo de coherencia infinito).

Tiempo de coherencia: ventana temporal durante la cual el canal (prácticamente) no cambia.

En la práctica los sistemas de comunicaciones estructuran la información en tramas:



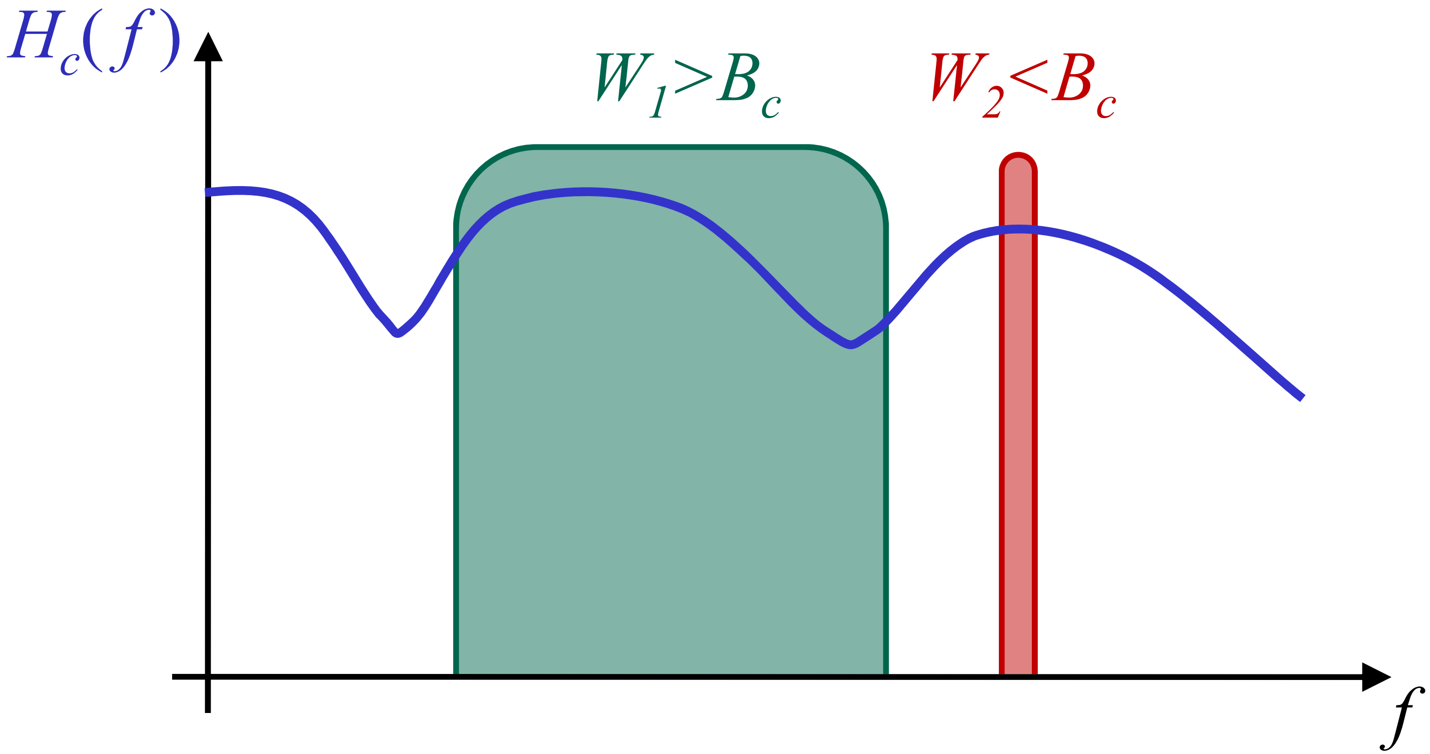
Por simplicidad asumiremos un escenario denominado "block fading": el canal no cambia durante un uso del canal (trama o grupo de tramas).

- **Invariante: El canal no cambia de un uso al siguiente**
- **Variante: El canal cambia de un uso al siguiente**

¿En qué medida un canal es selectivo?

Depende del ancho de banda de coherencia, B_c, del canal, pero es relativo al ancho de banda de la señal.

Estrictamente hablando, un canal es no selectivo si su respuesta en frecuencia es completamente plana (Ancho de banda de coherencia infinito).



Ancho de banda de coherencia: ventana frecuencial en la que la respuesta en frecuencia del canal es (prácticamente) constante.

2.2 Canal AWGN

Canal ideal

Consideramos:

- **Canal ideal, es decir, plano en frecuencia (al menos en banda)**
- **Canal invariante temporalmente (estacionario)**

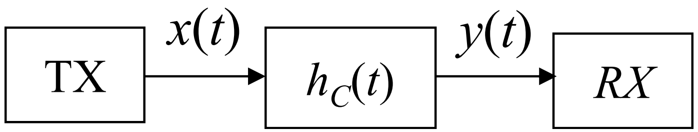
El efecto del canal es una atenuación y un retardo/desfase constantes

Ruido AWGN a la entrada de receptor con $N_0/2$ W/Hz

Habitualmente se denomina canal AWGN

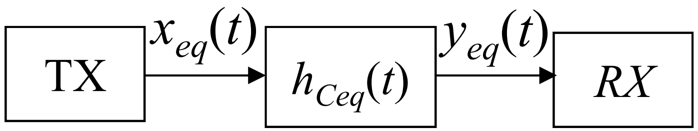
Canal ideal

Canal ideal: $h_C(t) = \alpha\delta(t-\tau_0) \xrightarrow{TF} H_C(f) = \alpha e^{-j2\pi f\tau_0}$



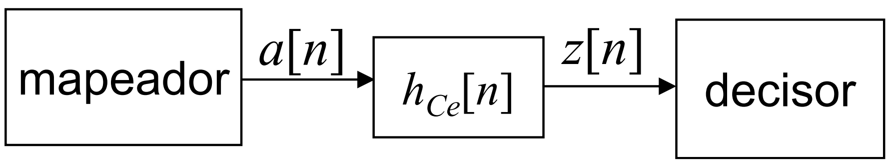
$$y(t) = x(t) * h_C(t) = \alpha x(t-\tau_0)$$

Canal ideal equivalente paso bajo: $h_{C_{eq}}(t) = h_C(t)e^{-j2\pi f_c t} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi = 2\pi f_c \tau_0}}{=} \alpha_{eq} e^{j\varphi_{eq}} \delta(t-\tau_0)$



$$y_{eq}(t) = x_{eq}(t) * h_{Ceq}(t) = \alpha_{eq} e^{j\varphi_{eq}} x_{eq}(t-\tau_0)$$

Canal ideal discreto equivalente: $h_{Ce}[n] = \alpha_e e^{j\varphi_e} \delta[n-n_0]$

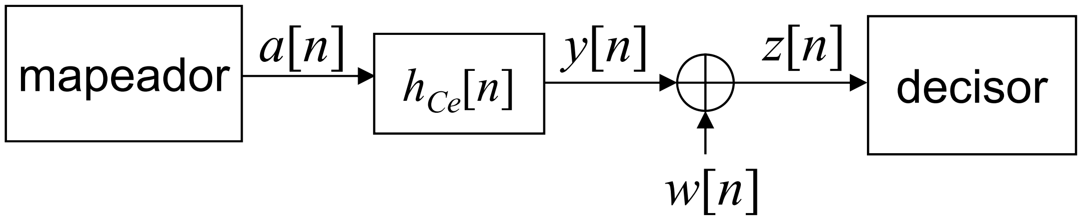


$$z[n] = a[n] * h_{Ce}[n] = \alpha_e e^{j\varphi_e} a[n-n_0]$$

Modelo de canal discreto AWGN

1) **Canal ideal:** $h_{Ce}[n] = \alpha_e e^{j\varphi_e} \delta[n - n_0]$

2) **Ruido AWGN complejo con N_0 W/Hz:** $w[n] \sim CN(0, \sigma_w^2)$



- **Observables (no hay ISI):** $z[n] = a[n] * h_{Ce}[n] + w[n] = \alpha_e e^{j\varphi_e} a[n - n_0] + w[n]$
- **SNR <u>a la entrada del decisor</u>:**

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{E\left[\left|y[n]\right|^2\right]}{E\left[\left|w[n]\right|^2\right]} = \frac{\alpha_e^2 E\left[\left|a[n]\right|^2\right]}{\sigma_w^2} = \frac{E_b \log_2 M}{N_0}$$

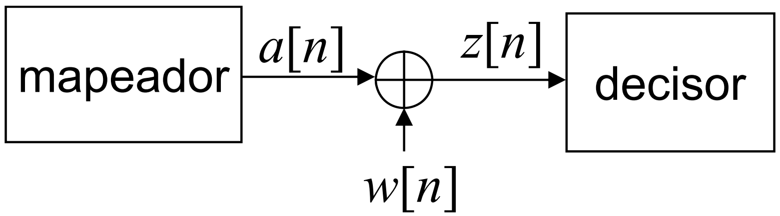
$$\begin{cases} E_b = \dfrac{P_s}{R_b} = \dfrac{\alpha_e^2 E\left[\left|a[n]\right|^2\right]}{R_b} = \dfrac{\alpha_e^2 E\left[\left|a[n]\right|^2\right]}{R_s \log_2 M} \\ N_0 = \dfrac{P_n}{f_s} = \dfrac{P_n}{R_s} = \dfrac{\sigma_w^2}{R_s} \end{cases}$$

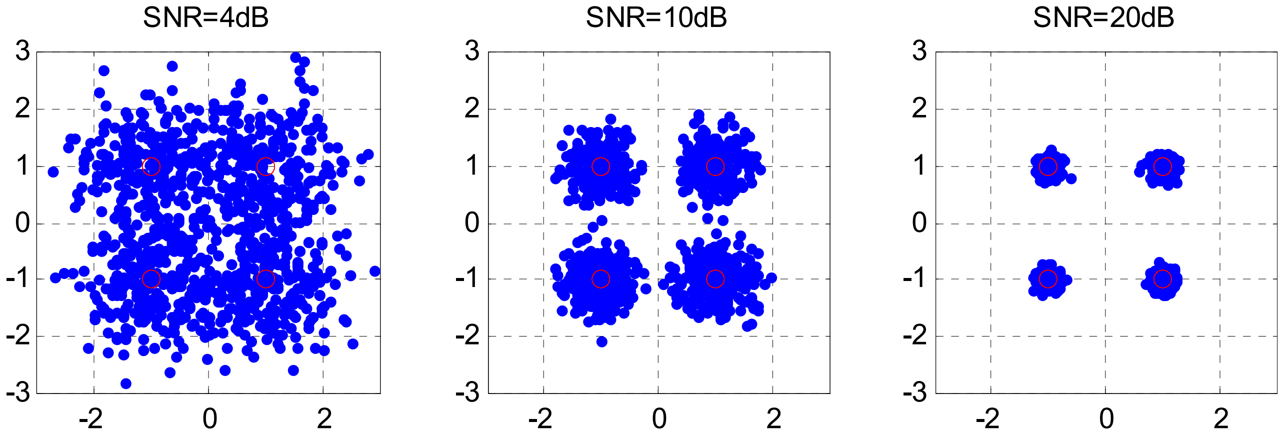
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR}{\log_2 M} \equiv SNR \text{ per bit}$$

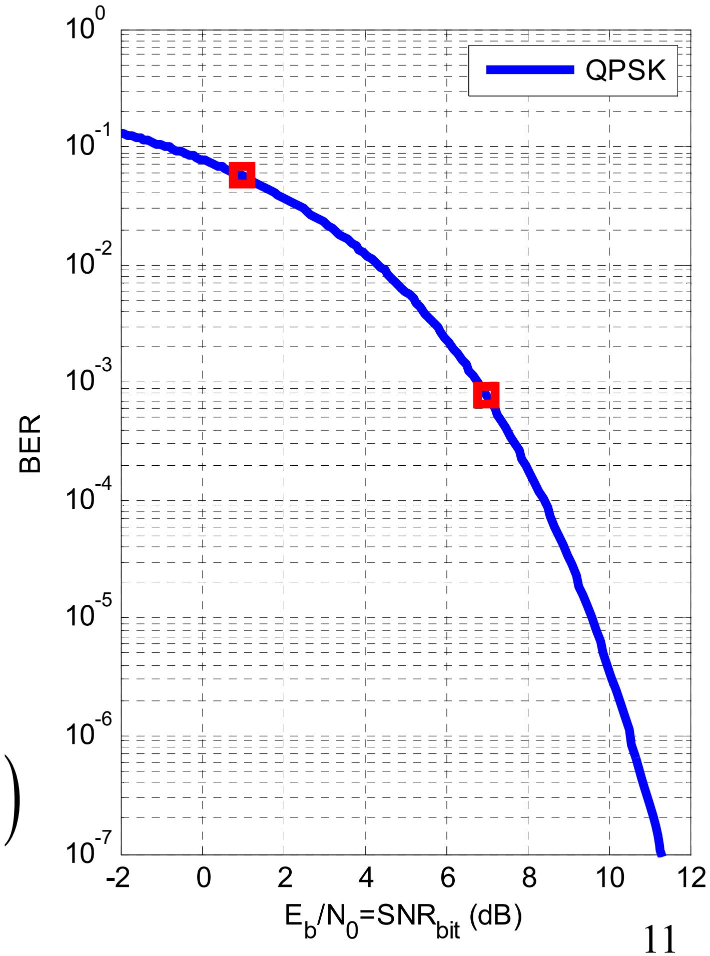
Ejemplo: BER de QPSK en canal AWGN

Asumimos que el receptor realiza:

- **sincronismo temporal y de fase perfecto (hace $n_0=0$ y $\varphi_e=0$)**
- **control automático de ganancia (AGC) perfecto (ganancia en amplitud $1/\alpha_e$).**







$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR}{\log_2 M} \underset{\text{QPSK}}{=} \frac{SNR}{2} \Rightarrow P_e(bit) \underset{\text{QPSK}}{=} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right)$$

2.3 Canal plano con desvanecimiento

Canal plano con desvanecimiento

Existen situaciones en las cuales la atenuación del canal varía.

Algunos ejemplos:

- **Incremento atenuación por lluvia (radioenlaces, enlaces por satélite)**
- **Comunicaciones inalámbricas: movimiento Tx, Rx, entorno**

Consideramos:

- **Canal ideal, es decir, plano en frecuencia (al menos en banda)**
- **Canal variante temporalmente (no estacionario)**
- **Ruido AWGN a la entrada de receptor con $N_0/2$ W/Hz**

Se denomina canal plano con desvanecimiento (flat fading)

Canal plano con desvanecimiento

- **Canal AWGN que varía con el tiempo, es decir, en las expresiones $h_{Ceq}(t)=\alpha_{eq}e^{j\varphi_{eq}}\delta(t-\tau_0)$ y $h_{Ce}[n]=\alpha_e e^{j\varphi_e}\delta[n-n_0]$, la amplitud y la fase son realizaciones de variables aleatorias.**
- **El efecto del canal es una atenuación y un retardo/desfase variantes con el tiempo**
- **Algunos ejemplos (modelos): Canal Rayleigh, Rice, Nakagami,…**

Notación:

$\boldsymbol{H}$: variable aleatoria canal complejo

$\boldsymbol{R}$: variable aleatoria amplitud del canal

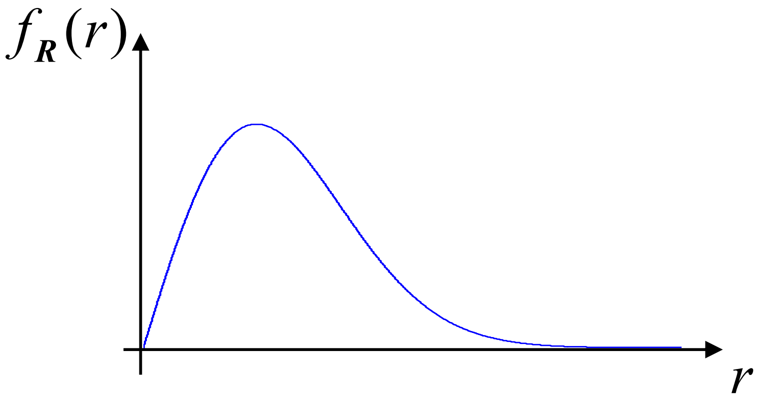
$\boldsymbol{\Phi}$: variable aleatoria fase del canal

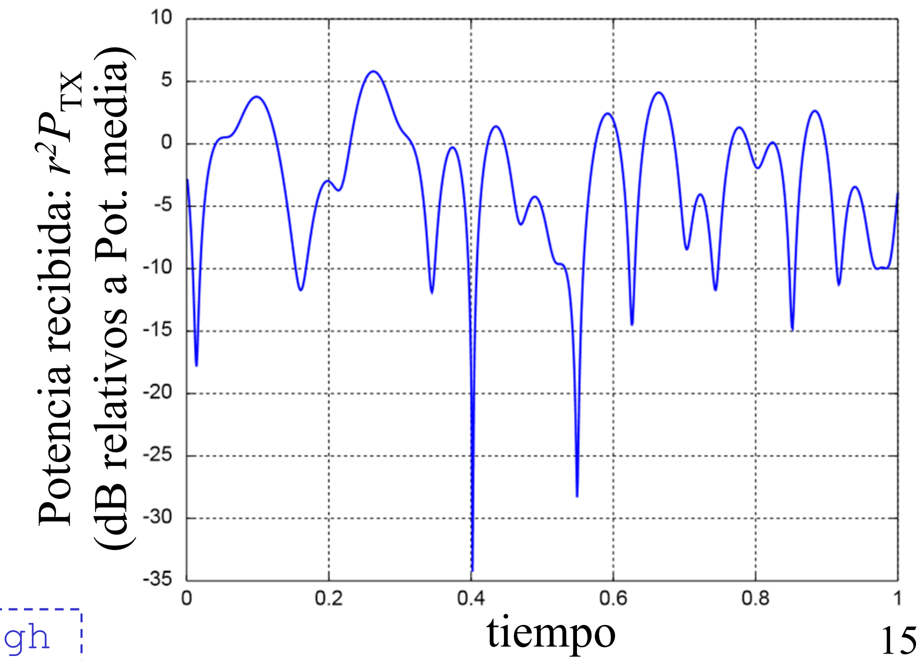
Canal Rayleigh

$$\boldsymbol{H}_{Rayleigh} = \boldsymbol{R}e^{j\boldsymbol{\Phi}} \sim CN(0,\sigma_r^2), \text{ es decir} \begin{cases} \boldsymbol{R} \text{ v.a. rayleigh con } f_{\boldsymbol{R}}(r) = \dfrac{2r}{\sigma_r^2} e^{-r^2/\sigma_r^2}, r \geq 0 \\ \boldsymbol{\Phi} \text{ v.a. uniforme en } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

La ganancia en amplitud, $r=|h|$, sigue una distribución Rayleigh

La ganancia en potencia, $r^2=|h|^2$, sigue una distribución exponencial





- **Típico en entornos inalámbricos NLOS (Non Line-Of-Sight)**
- **Modela efectos de pequeña escala (multipath)**

```
% Una realización de un canal Rayleigh
hce=(randn+1i*randn)/sqrt(2)
```

Canal Rice

Canal Rayleigh al que se suma una componente constante (invariante) de amplitud α

$$\boldsymbol{H}_{Rice} = \boldsymbol{R}e^{j\boldsymbol{\Phi}} \sim CN(\alpha, \sigma_r^2)$$

Factor de Rice: $K_{rice} = \dfrac{\alpha^2}{\sigma_r^2}$

- **Si** $K_{rice} = 0$ **equivale a canal Rayleigh**
- **Si** $K_{rice} = \infty$ **equivale a canal AWGN (no desvanecimiento)**

Típico en entornos inalámbricos con LOS (Line-Of-Sight)

```
% Una realización de un canal Raice
hce=k/(k+1)+(randn+1i*randn)/sqrt(2*(k+1))
```

Efecto del desvanecimiento en la BER en QPSK

- **En un canal AWGN la BER de la modulación QPSK viene dada por:**

$$P_e^{AWGN}(bit) \underset{\text{QPSK}}{=} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right)$$

- **Pero si el canal sufre desvanecimientos, en cada realización (uso) del canal tendremos una SNR distinta:**

$$SNR = r^2\,\overline{SNR}$$

$$E_b/N_0 = r^2\,\overline{E_b/N_0}$$

donde $\overline{SNR} = \mathrm{E}\left[SNR\right]$ **y** $\overline{E_b/N_0} = E\left[E_b/N_0\right]$ **son los valores promedio y** r **la respuesta en amplitud del canal (una realización de la v.a.** $\boldsymbol{R}$**)**

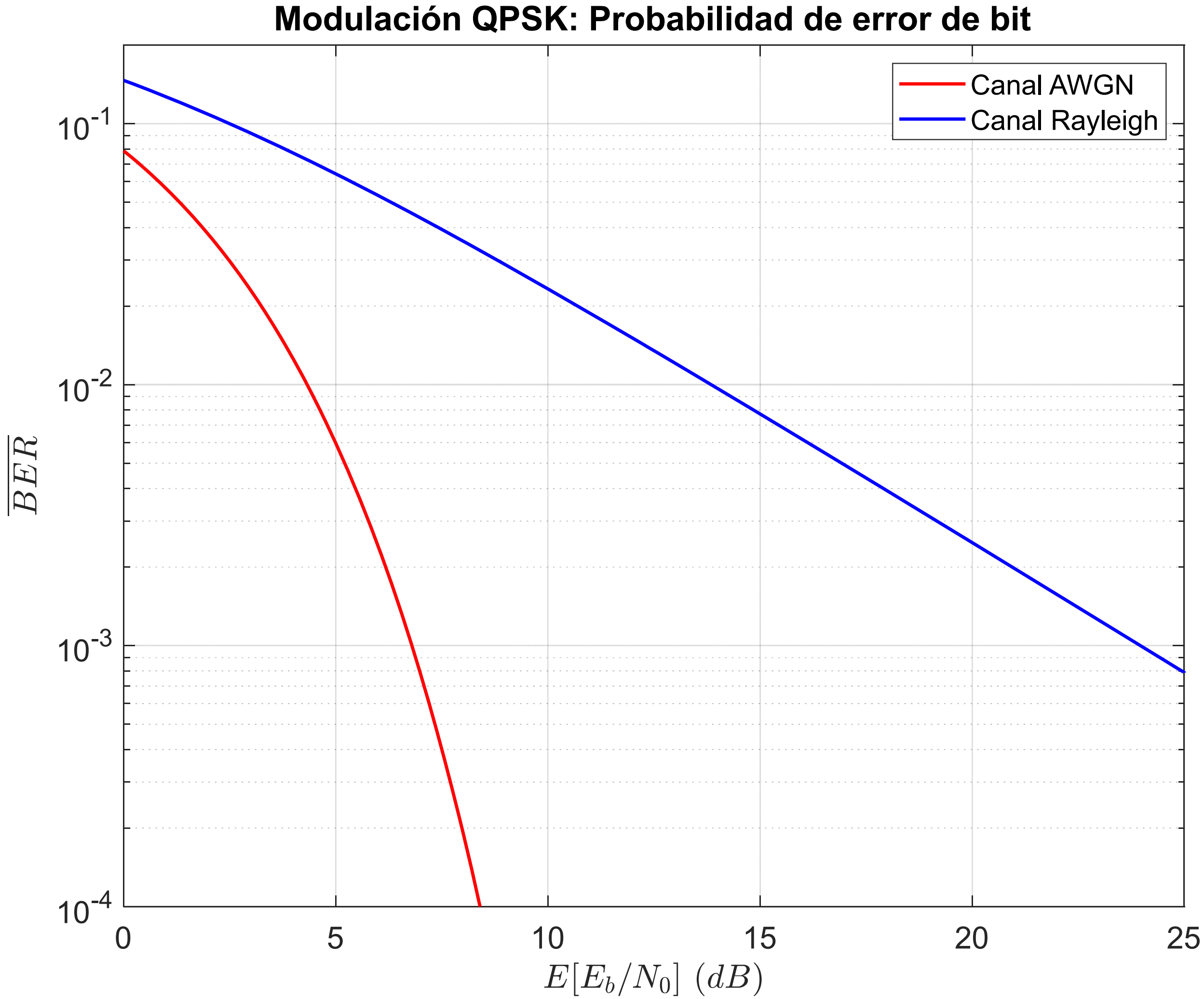
- **Entonces la BER promedio se obtiene promediando la BER de cada uso:**

$$P_e(bit) = E\left[P_e^{AWGN}(bit)\right] \underset{\text{QPSK}}{=} E\left[Q\left(\sqrt{SNR}\right)\right] = E\left[Q\left(\sqrt{\boldsymbol{R}^2\,\overline{SNR}}\right)\right]$$

Ejemplo: BER de QPSK en canal Rayleigh

$$P_e(bit) = E[P_e^{AWGN}(bit)] = E\left[Q\left(\sqrt{2\boldsymbol{R}^2\overline{E_b/N_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\overline{E_b/N_0}}}}\right)$$

con $f_{\boldsymbol{R}}(r) = 2re^{-r^2}, r \geq 0$



2.4 Canal selectivo invariante

Canal selectivo invariante

Existen situaciones en las cuales el canal es selectivo en frecuencia, por ejemplo:

- **Canal multitrayecto en comunicaciones radio**
- **Múltiples reflexiones/desadaptaciones en transmisión por cable**

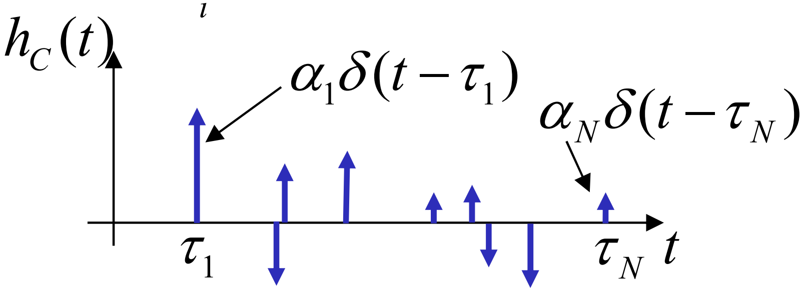
Consideramos:

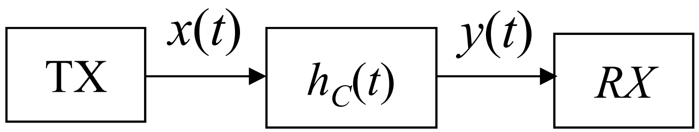
- **Canal no ideal, es decir, selectivo en frecuencia (al menos en banda)**
- **Canal invariante temporalmente (estacionario)**
- **Ruido AWGN a la entrada de receptor con $N_0/2$ W/Hz**

Se denomina canal selectivo invariante

Modelos de canal selectivo invariante

$$h_C(t) = \sum_i \alpha_i \delta(t-\tau_i) \xrightarrow{TF} H_C(f) = \sum_i \alpha_i e^{-j2\pi f \tau_i}$$

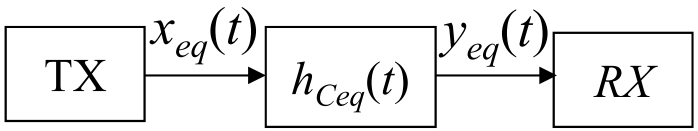




$$y(t) = x(t) * h_C(t) = \sum_i \alpha_i x(t-\tau_i)$$

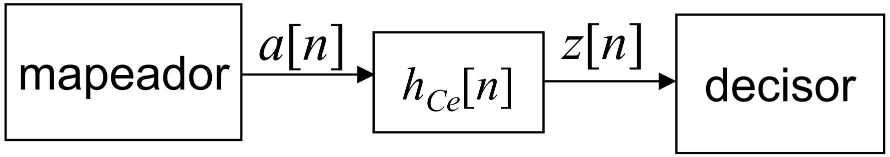
equivalente paso bajo: $h_{Ceq}(t) = h_C(t) e^{-j2\pi f_c t} = \sum_i \alpha_{eq_i} e^{j\varphi_{eq_i}} \delta(t-\tau_i)$

$\varphi = 2\pi f_c \tau_0$



$$y_{eq}(t) = x_{eq}(t) * h_{Ceq}(t) = \sum_i \alpha_{eq_i} e^{j\varphi_{eq_i}} x_{eq}(t-\tau_i)$$

discreto equivalente: $h_{Ce}[n] = \sum_i \alpha_{e_i} e^{j\varphi_{e_i}} \delta[n-n_i]$

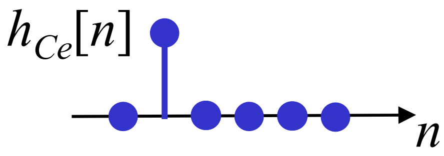


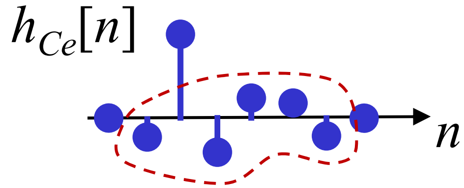
$$z[n] = a[n] * h_{Ce}[n] = \sum_i \alpha_{e_i} e^{j\varphi_{e_i}} a[n-n_i]$$

Consecuencias

En el dominio del tiempo

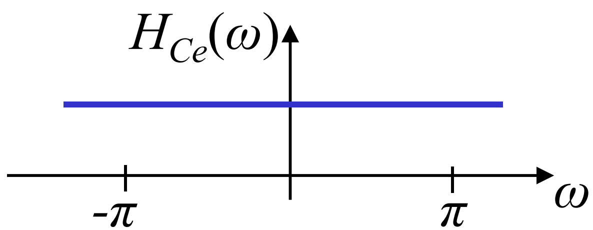
- El canal discreto equivalente tiene **memoria**
- La energía de un símbolo se dispersa a símbolos anteriores/posteriores (**dispersión temporal**)

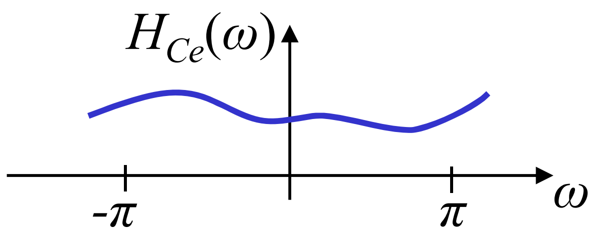




En el dominio de la frecuencia:

- El canal discreto equivalente no es plano en frecuencia
- Aparece **selectividad frecuencial**





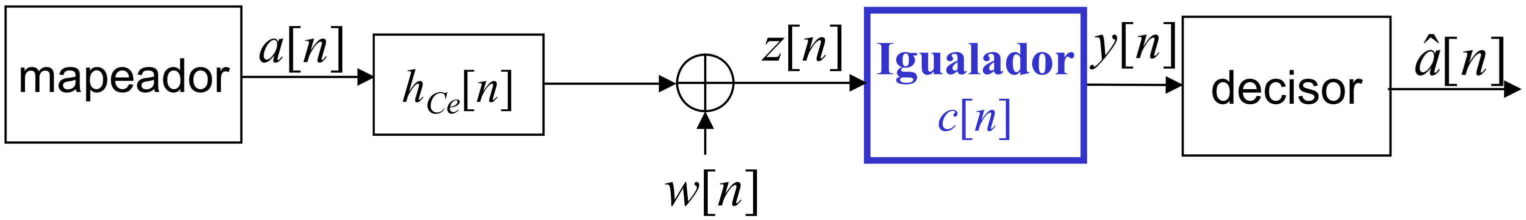
Interferencia entre símbolos (ISI) ➔ BER↑↑

2.5 Detección en presencia de ISI

¿Cómo solucionar el problema de la ISI?

- Receptor ML (Maximum Likelihood) de secuencias
  - Es la solución óptima (la de menor probabilidad de error)
  - Detección de una secuencia de L símbolos
  - Implementado mediante algoritmo Viterbi
- Igualación
  - Solución subóptima
  - Distintos tipos: lineales y no lineales
- Otras técnicas
  - Búsqueda de modulaciones robustas a la ISI
  - Estudiaremos espectro ensanchado y OFDM

Igualadores Lineales

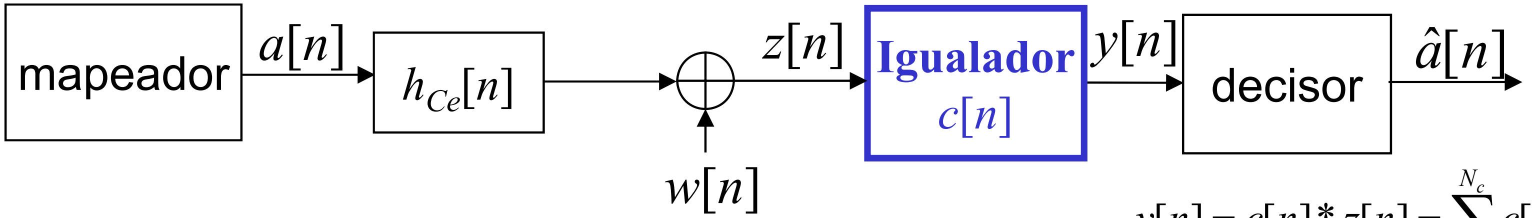


- **Igualador Lineal: Filtro digital FIR de longitud** N_c+1

$$y[n] = c[n] * z[n] = \sum_{k=0}^{N_c} c[k] z[n-k]$$

- **Cómo obtener los coeficientes,** $c[n]$**, del filtro:**
  - **Criterio del cero forzado ("zero forcing")**
  - **Criterio del mínimo error cuadrático medio (MSE)**

Igualador Lineal ZF



$$y[n] = c[n] * z[n] = \sum_{k=0}^{N_c} c[k] z[n-k]$$

Criterio del cero forzado

- **Conseguir** $h_{Ce}[n] * c[n] = \delta[n-d]$
- **Es decir, forzar a que** $y[n] = a[n-d]$
- **Solución: resolver sistema de** N_c+1 **ecuaciones con** N_c+1 **incógnitas:**

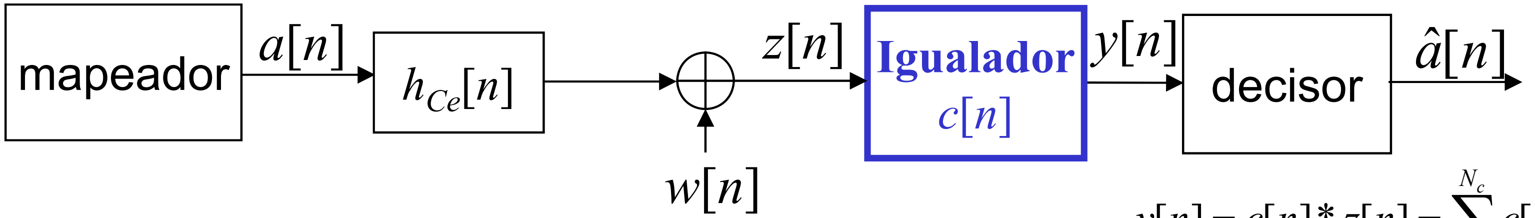
$$c[0]z[n] + c[1]z[n-1] + \cdots + c[N_c]z[n-N_c] = a[n-d], \quad n = n_0, \ldots, n_0 + N_c$$

donde: d **es el retardo total (canal equivalente + igualador)**

n_0 **es el instante de observación del 1er símbolo sin igualar**

- **Buenas prestaciones con bajo nivel de ruido**
- **Elimina la ISI, pero puede amplificar el ruido**

Igualador Lineal MSE



$$y[n] = c[n] * z[n] = \sum_{k=0}^{N_c} c[k] z[n-k]$$

Criterio del mínimo error cuadrático medio (MMSE)

- **Minimiza el error medio entre la salida del igualador y el símbolo**

$$\min_{c[n]} E\left[\left(a[n-d] - y[n]\right)^2\right]$$

- **Más robusto frente al ruido que el ZF**

- **Computacionalmente complicado**
  - **- Solución bloque (Least Squares)**
  - **- Soluciones iterativas (LMS)**

Algunos problemas de los igualadores

- **Problema 1: ¿Cómo conocer los símbolos $a[n]$?**

A. Algoritmos No Ciegos

- **Basados en secuencias de entrenamiento / símbolos piloto:**
  - **Envío de una secuencia conocida ➔ el receptor adapta el igualador**
- **Usados, por ejemplo, en modems telefónicos**
  - **El canal no cambia en el transcurso de una llamada**

B. Algoritmos Ciegos

- **Basados en decisión (u otras propiedades conocidas de los símbolos)**
  - **DFE: decision feedback equalizer**
- **Suponiendo prob. de error baja, entonces $\hat{a}[n] = a[n]$ (casi siempre)**
- **No es necesaria secuencia de entrenamiento**

- **Problema 2: El canal puede cambiar con el tiempo**
  - **Canal selectivo variante**
  - **Es necesario modificar $c[n]$: Filtro Adaptativo**

2.6 Selectividad frecuencial frente a varianza temporal

Selectividad frecuencial vs Varianza temporal

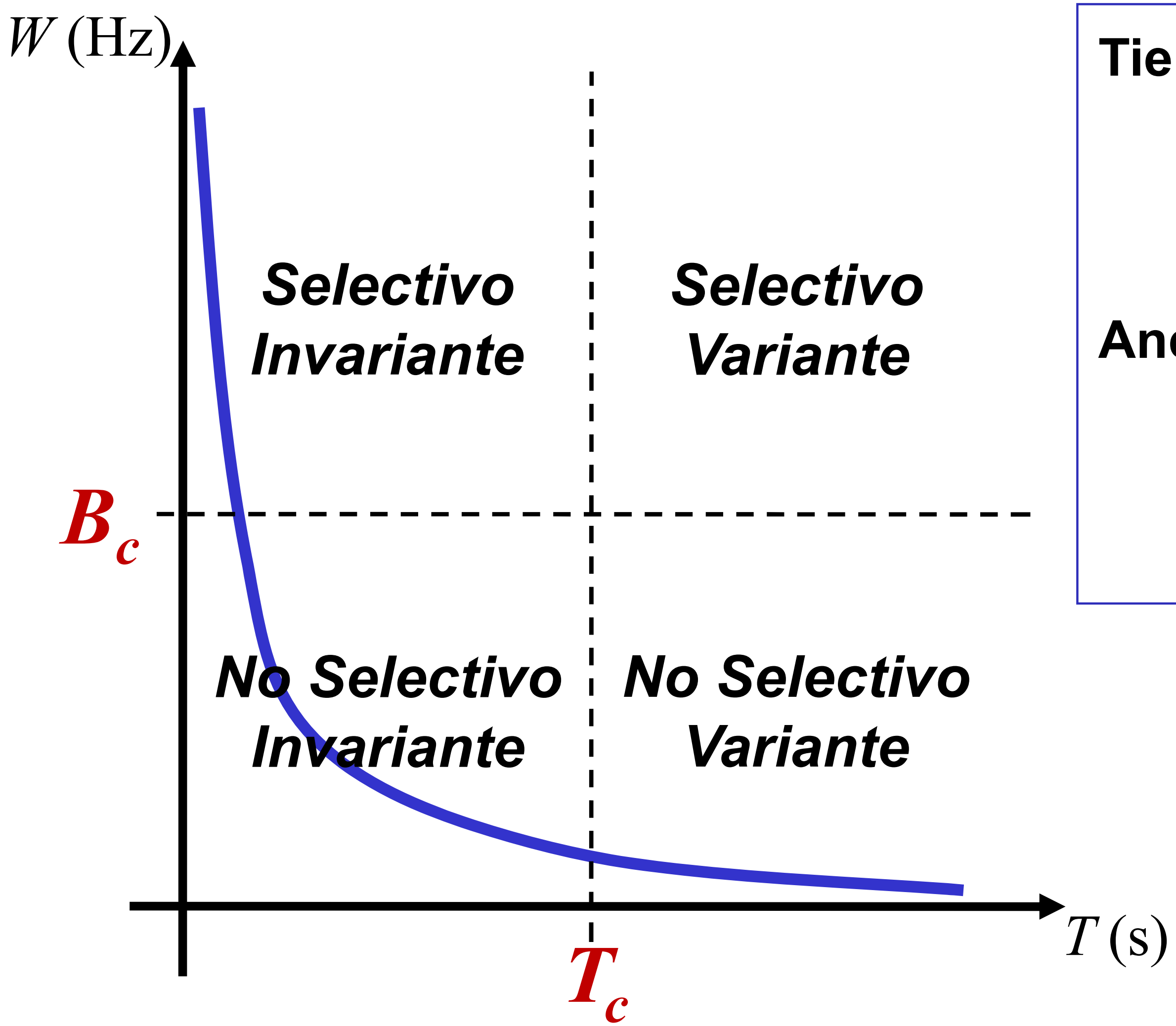
Dado un canal:

será Selectivo/Plano en función del ancho de banda de la señal transmitida, W**.**

será Variante/Invariante en función del periodo de símbolo, T**, (o de la duración de trama)**

Pero W **y** T **tienen una relación inversa:** $W \propto R_s = \dfrac{1}{T}$

Tipos de canales en la realidad



Tiempo de coherencia:

$$T_c \propto \frac{1}{\sigma_\nu} \approx \frac{c}{f_c \nu}$$

Ancho de banda de coherencia:

$$B_c \propto \frac{1}{\sigma_\tau} \propto \frac{1}{\tau_{\max}}$$

c : velocidad de la luz

ν : velocidad relativa

$\sigma_\nu = \nu_{RMS} : \begin{cases} \text{desviación típica doppler} \\ \text{doppler spread} \end{cases}$

$\sigma_\tau = \tau_{RMS} : \begin{cases} \text{desviación típica del retardo} \\ \text{delay spread} \end{cases}$

$\tau_{\max}$: retardo máximo

En general, si un canal es variante (selectivo temporalmente) no será selectivo en frecuencia, y viceversa