

COMUNICACIONES DIGITALES
3^{er} curso Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Mención en Sistemas de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

Tema 1. Espacio de Señal

Jesús María Ibáñez Díaz

GRUPO DE TRATAMIENTO AVANZADO DE SEÑAL (G.T.A.S.)

gtas.unican.es

Índice

Tema 1. Espacio de Señal

1.1 Representación geométrica de señales.

- 1.1.1 Espacio de señal
- 1.1.2 Base ortonormal
- 1.1.3 Ortogonalización de Gram-Schmidt

1.2 Recepción óptima en AWGN.

- 1.2.1 Esquema del receptor óptimo
- 1.2.2 Señales y ruido
- 1.2.3 Decisor óptimo
- 1.2.4 Cálculo de probabilidades de error
- 1.2.5 Expresiones aproximadas de la probabilidad de error

1.3 Ejemplos

- 1.3.1 8PSK
- 1.3.2 16QAM
- 1.3.3 FSK

1.4 Análisis y simulación de sistemas de comunicaciones digitales.

- 1.4.1 Sistema completo
- 1.4.2 Sistema equivalente paso bajo
- 1.4.3 Sistema discreto equivalente

1.1 Representación geométrica de señales

Representación de señales en Espacio de Señal

- **Producto interno:** $\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \int_a^b s_1(t) s_2^*(t) dt$ (proyección)
- **Ortogonalidad:** $s_1(t) \perp s_2(t) \Leftrightarrow \langle s_1(t), s_2(t) \rangle = 0$
- **Norma:** $\|s(t)\| = \sqrt{\langle s(t), s(t) \rangle} = \left(\int_a^b |s(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ ($\sqrt{\text{energía}}$)
- **Base ortonormal:**

$\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)\}$ base ortonormal si y sólo si

“orto”: $\int_a^b \psi_i(t) \psi_j(t) dt = 0, \quad i \neq j$

“normal”: $\int_a^b |\psi_i(t)|^2 dt = 1, \quad \forall i$

- **Representación:** $s(t) = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(t)$ Señal como vector
 $s(t) = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ en espacio N-dimensional

Base Ortonormal

- Para representar de M señales, $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$, en Espacio de Señal
- Necesitamos una base ortonormal $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)\}$ de dimensión $N \leq M$
- Permite estudiar las M señales en espacio vectorial de dimensión N .

$$s_k(t) = \sum_{j=1}^N a_{kj} \psi_j(t) = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kN}), \quad k = 1, \dots, M$$

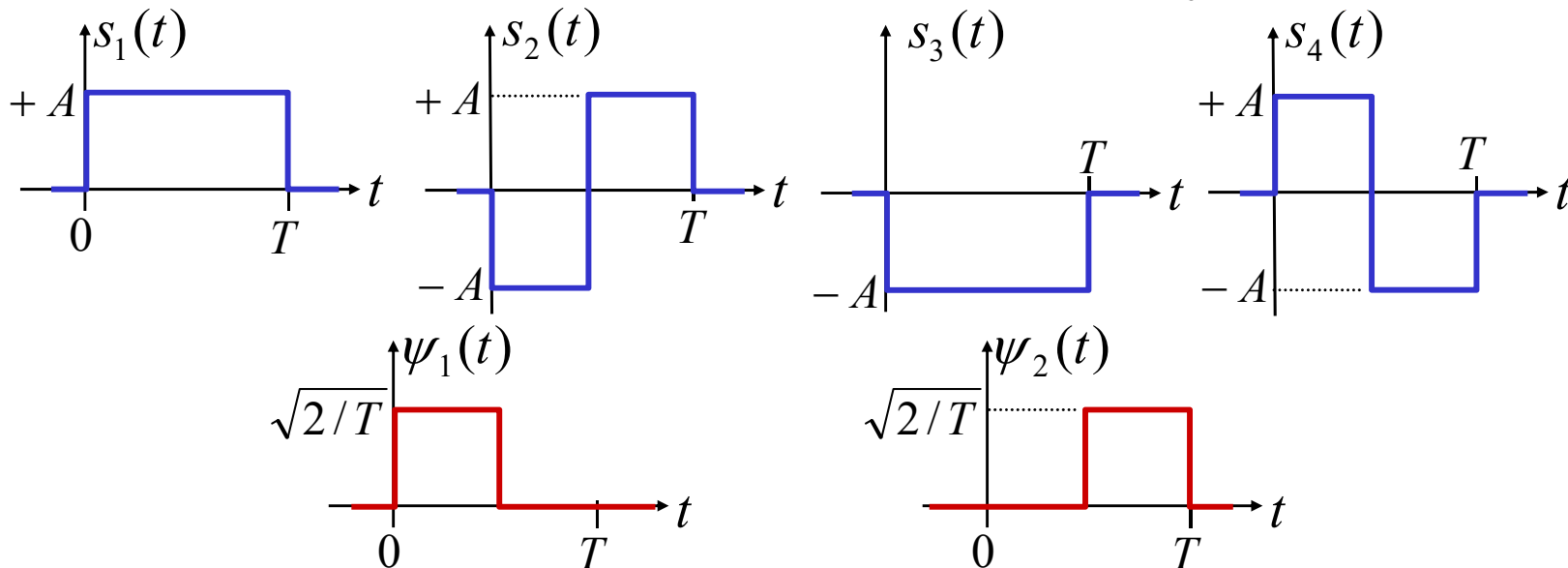
- ¿Cómo obtener las funciones base?
 - Inspección
 - Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Obtención de Base Ortonormal por inspección

- Partiendo de M señales, $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$, obtener una base ortonormal $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)\}$ de dimensión $N \leq M$

- Sus elementos deben estar normalizados $\|\psi_i(t)\| = 1$
- Sus elementos deben ser ortogonales $\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
- Las señales deben poder representarse en función de la base

- Ejemplo por inspección: $s_k(t) = \sum_{j=1}^N a_{kj} \psi_j(t), \quad k = 1, \dots, M$



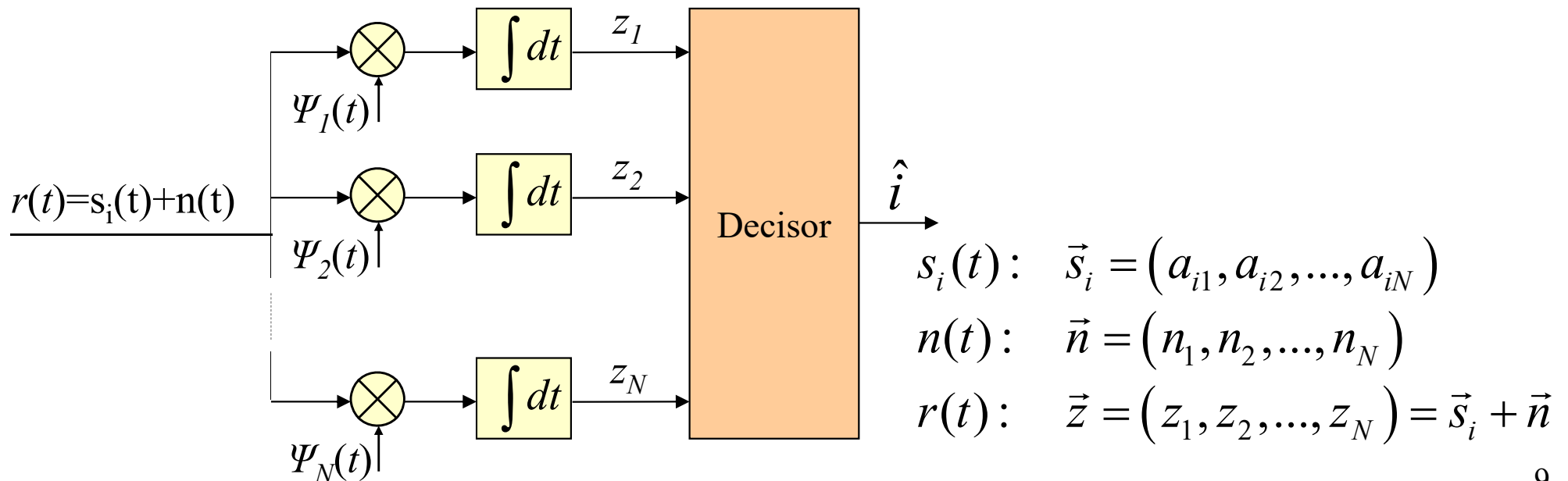
Ortogonalización de Gram-Schmidt

- 1) Se escoge una señal y se normaliza:
$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\int s_1^2(t) dt}}$$
- 2) Se escoge otra señal, p.e. $s_2(t)$.
 - 2.1) Se obtiene su proyección sobre $\psi_1(t)$:
$$a_{21} = \int s_2(t)\psi_1(t) dt$$
 - 2.2) Se obtiene la señal ortogonal a $\psi_1(t)$:
$$g_2(t) = s_2(t) - a_{21}\psi_1(t)$$
 - 2.3) Se normaliza:
$$\psi_2(t) = g_2(t) / \|g_2(t)\|$$
- 3) Se escoge otra señal, p.e. $s_i(t)$.
 - 3.1) Proyección sobre bases previas:
$$a_{ij} = \int s_i(t)\psi_j(t) dt$$
 - 3.2) Señal ortogonal a las bases previas:
$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\psi_j(t)$$
 - 3.3) Si $g_i(t)=0$ se reinicia 3) con otra señal
 - 3.4) Se normaliza:
$$\psi_i(t) = g_i(t) / \|g_i(t)\|$$
- 4) Se repite el paso 3) hasta que no queden señales.

1.2 Recepción óptima en AWGN

Receptor óptimo de M formas de onda en espacio de señal

- M señales (símbolos) equiprobables, $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$, en AWGN
- Obtener una base ortonormal $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)\}$ con $N \leq M$
- Receptor basado en N correladores (N filtros adaptados a $\psi_i(t)$)
- Decisor: **Criterio de la mínima distancia** $\hat{i} = \arg \min_k (\|\vec{s}_k - \vec{z}\|)$



Análisis del receptor en espacio de señal: las señales y el ruido (I)

- **Ruido Gaussiano Blanco (AWGN)**
 - $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ es una v.a. Gaussiana N dimensional
 - Cada componente ortogonal al resto \rightarrow incorreladas \rightarrow independientes
 - Cada componente posee
 - Media nula
 - Varianza: $\sigma_n^2 = N_0/2$
- **Señal recibida:** $r(t): \vec{z} = \vec{s}_i + \vec{n}$ **señal i -ésima + Ruido**
- **Si se transmite el símbolo k**
 - $\vec{z} | S_k = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ es una v.a. Gaussiana N dimensional
 - Media: centrada en el punto $s_k(t): \vec{s}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kN})$
 - Varianza: $\sigma_n^2 = N_0/2$

Análisis del receptor en espacio de señal: las señales y el ruido (II)

Ejemplo en dos dimensiones:

Base: $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$

$s_i(t) : \vec{s}_i = (a_{i1}, a_{i2})$

$s_1(t) : \vec{s}_1 = (a_{11}, a_{12})$

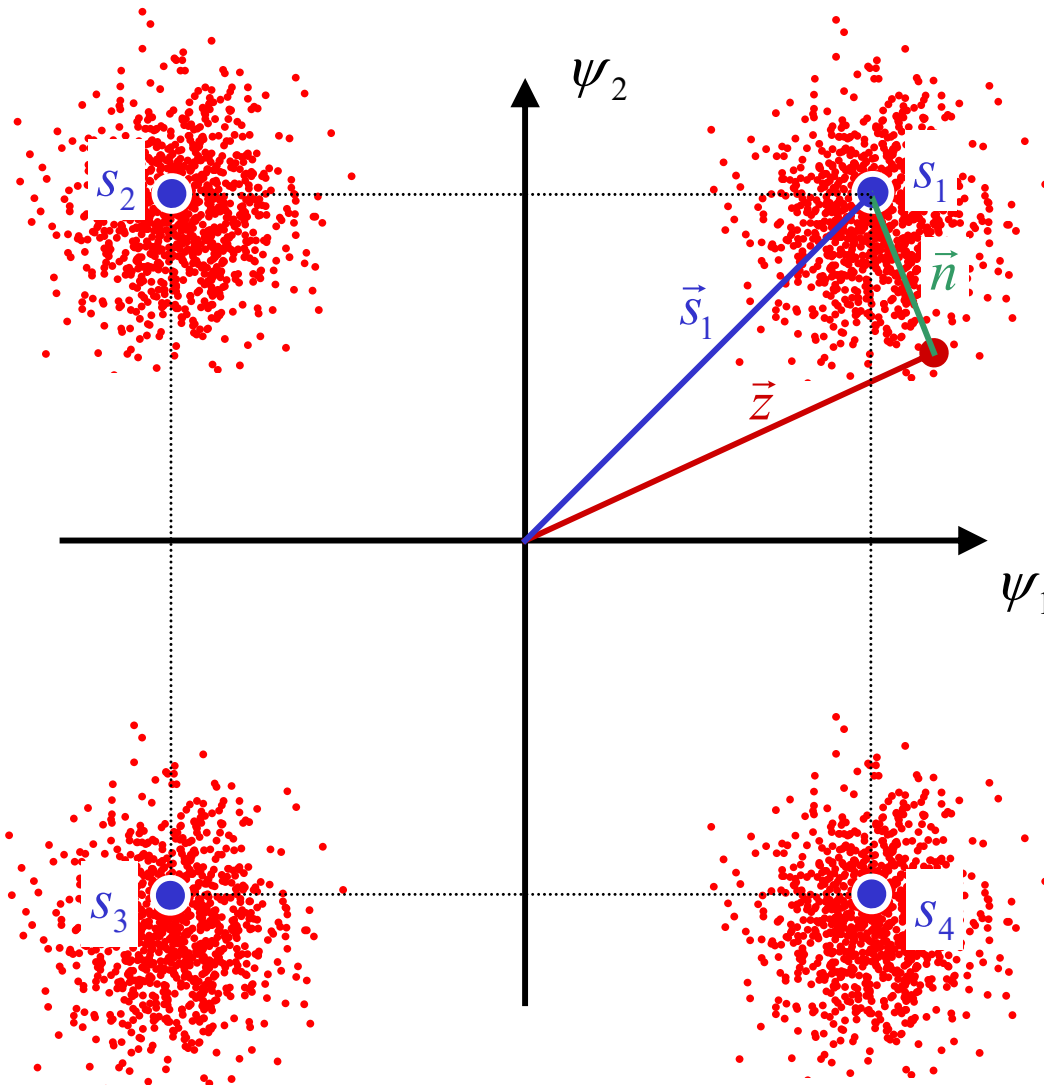
$n(t) : \vec{n} = (n_1, n_2)$

$r(t) : \vec{z} = \vec{s}_i + \vec{n}$

Si se transmite el símbolo S_2 :

$\vec{z} | S_2 = (z_1, z_2)$

$f(\vec{z} | S_2) = N(\vec{s}_2, \sigma_n \mathbf{I})$



Análisis del receptor en espacio de señal: Decisor óptimo

- **Criterio del mínimo error**

- Recibo observable \vec{z} , buscar k que maximiza $P(S_k | \vec{z}) = \frac{f(\vec{z} | S_k)P(S_k)}{f(\vec{z})}$

- **Que, en el caso equiprobable, equivale al criterio MAP**

- Buscar k que maximiza $f(\vec{z} | S_k)$

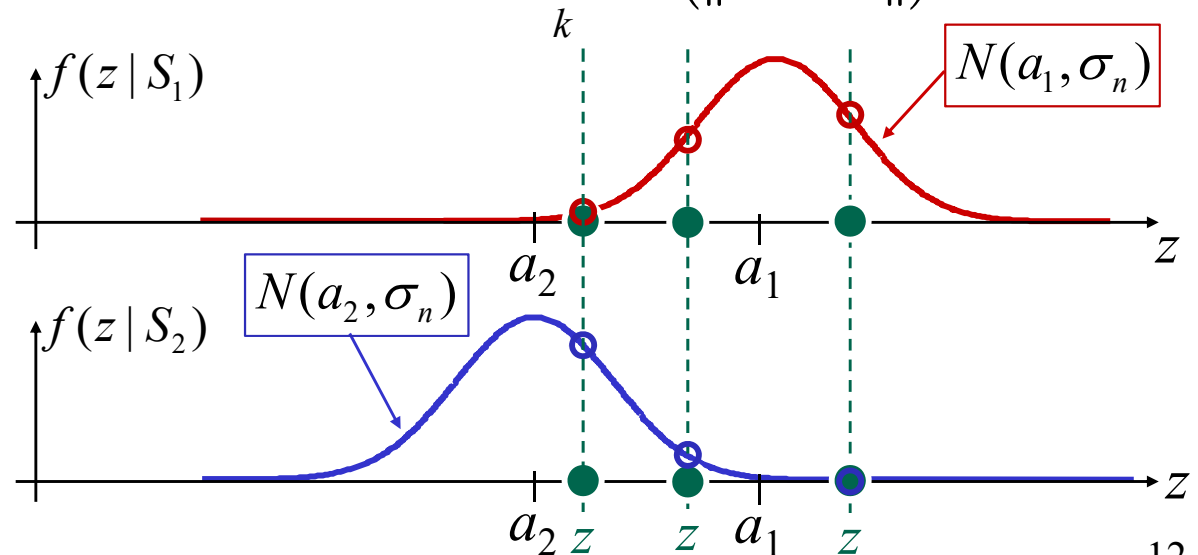
- **Que, en el caso Gaussiano** $f(\vec{z} | S_k) = N(\vec{s}_k, \sigma_n \mathbf{I})$,

equivale al **criterio de mínima distancia** $\hat{i} = \arg \min_k (\|\vec{s}_k - \vec{z}\|)$

Ejemplo unidimensional binario:

$$f(\vec{z} | S_k) = N(a_k, \sigma_n)$$

$$(\|\vec{s}_k - \vec{z}\|) = |a_k - z|$$



Cálculo de probabilidad de error

- **Geoméricamente, en términos de:**

- **Distancia entre observables,** $d_{ij} = \|\vec{s}_i - \vec{s}_j\|$
- **Varianza de ruido:** $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$
- **Energía media de bit,** $E_b = E_s / \log 2M$
 - **Energía de símbolo i :** $E_i = (\text{distancia } \vec{s}_i \text{ al origen})^2$

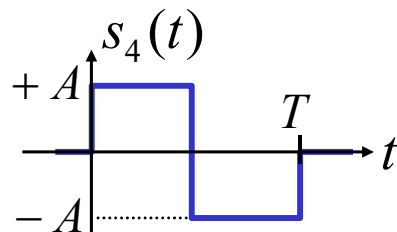
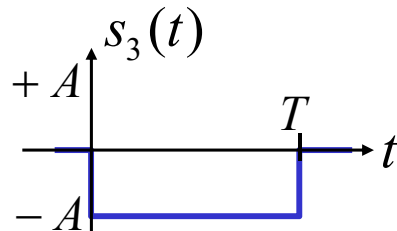
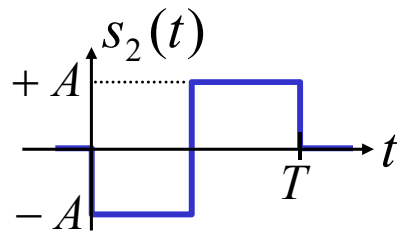
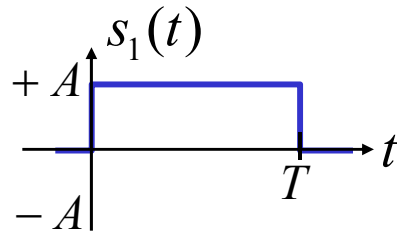
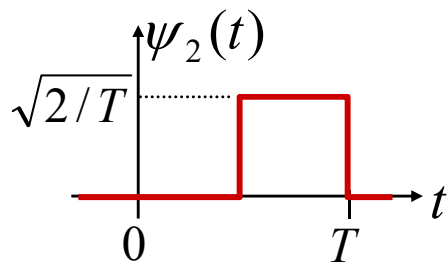
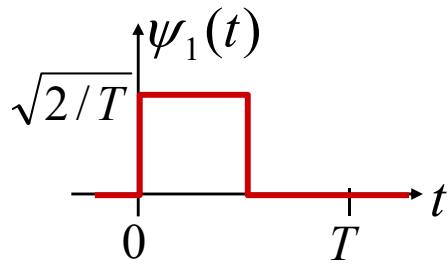
- **Resultado:**

$$P_e = \text{función}(d, \sigma_n) = \text{función}(E_b, N_0)$$

Ejemplo de receptor óptimo en espacio de señal (I)

$M=4$ Símbolos

Base Ortonormal $N=2$



$$s_1(t) = A\sqrt{T/2} (+\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

$$s_2(t) = A\sqrt{T/2} (-\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

$$s_3(t) = A\sqrt{T/2} (-\psi_1(t) - \psi_2(t))$$

$$s_4(t) = A\sqrt{T/2} (+\psi_1(t) - \psi_2(t))$$

$$E_b = \frac{E_s}{2} = A^2 \frac{T}{2} \text{ Julios}$$

$$\vec{s}_1 = (+\sqrt{E_b}, +\sqrt{E_b})$$

$$\vec{s}_2 = (-\sqrt{E_b}, +\sqrt{E_b})$$

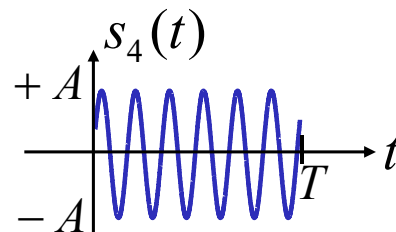
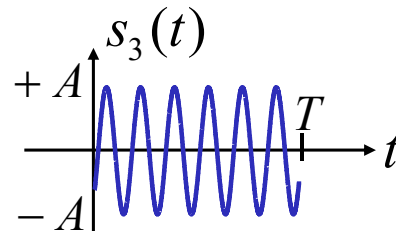
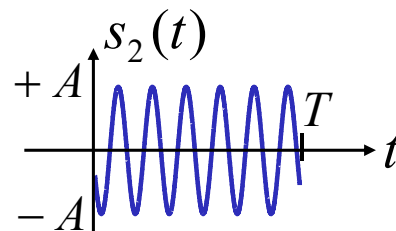
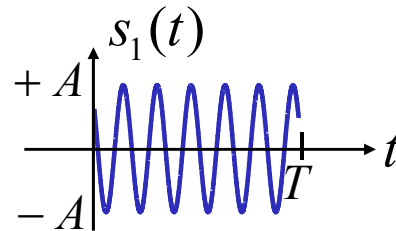
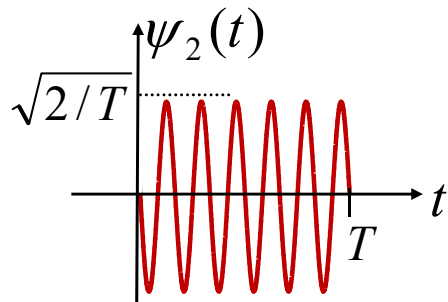
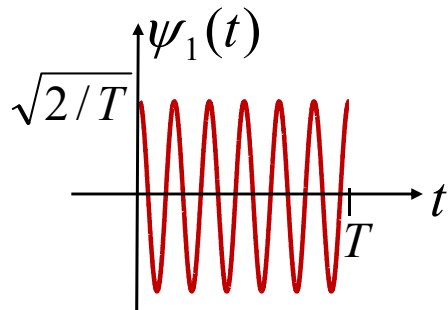
$$\vec{s}_3 = (-\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$$

$$\vec{s}_4 = (+\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$$

Ejemplo de receptor óptimo en espacio de señal (II)

$M=4$ Símbolos

Base Ortonormal $N=2$



$$s_1(t) = A\sqrt{T} / 2 (+\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

$$s_2(t) = A\sqrt{T} / 2 (-\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

$$s_3(t) = A\sqrt{T} / 2 (-\psi_1(t) - \psi_2(t))$$

$$s_4(t) = A\sqrt{T} / 2 (+\psi_1(t) - \psi_2(t))$$

$$E_b = \frac{E_s}{2} = A^2 \frac{T}{4} \text{ Julios}$$

$$\vec{s}_1 = (+\sqrt{E_b}, +\sqrt{E_b})$$

$$\vec{s}_2 = (-\sqrt{E_b}, +\sqrt{E_b})$$

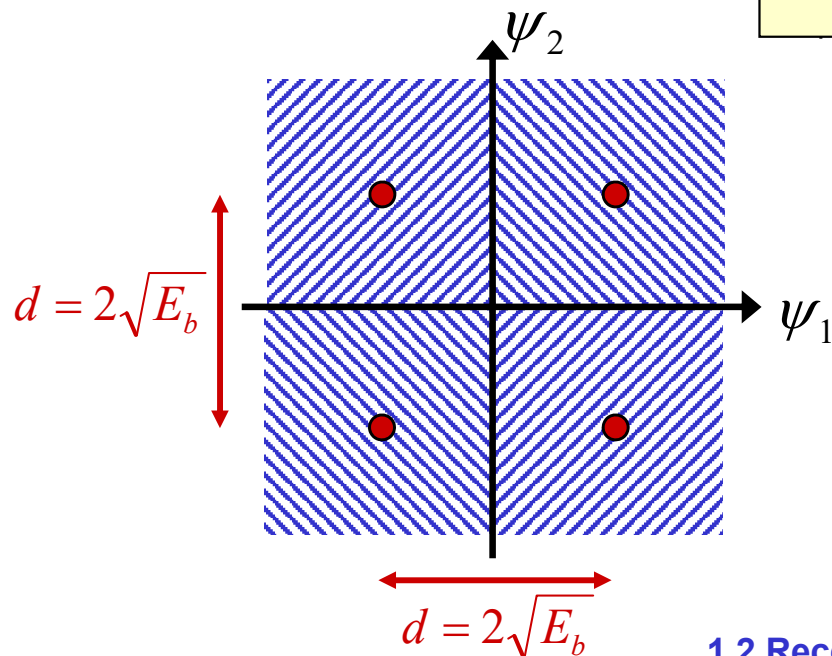
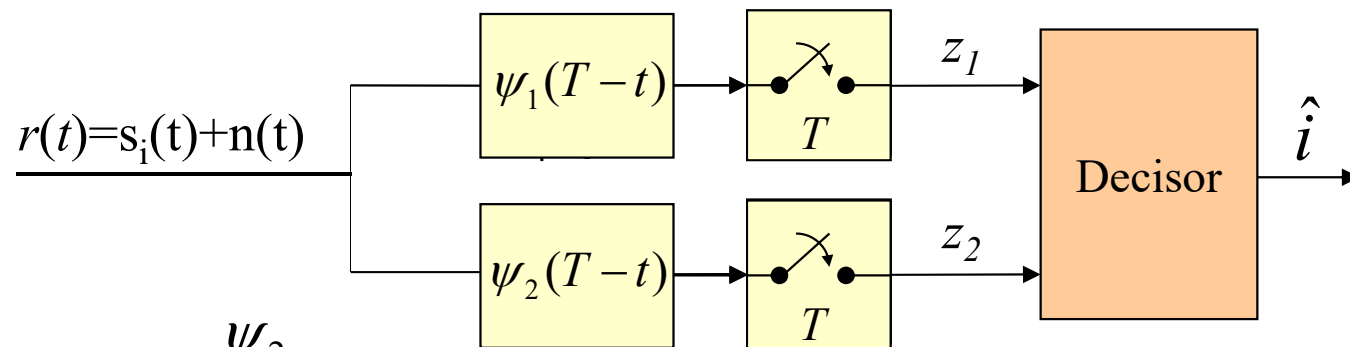
$$\vec{s}_3 = (-\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$$

$$\vec{s}_4 = (+\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$$

Ejemplo de receptor óptimo en espacio de señal (III)

- Receptor óptimo

- Dos filtros adaptados a $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$
- Decisor por el criterio de mínima distancia



Lógica de Decisión

Si $z_1 > 0$ y $z_2 > 0 \rightarrow S_1$

Si $z_1 < 0$ y $z_2 > 0 \rightarrow S_2$

Si $z_1 < 0$ y $z_2 < 0 \rightarrow S_3$

Si $z_1 > 0$ y $z_2 < 0 \rightarrow S_4$

Ejemplo de receptor óptimo en espacio de señal (y IV)

- Probabilidad de error**

$$P(\text{error} | S_1) = 1 - P(\overline{\text{error}} | S_1)$$

$$P(\overline{\text{error}} | S_1) = P(z_1 > 0 \cap z_2 > 0 | S_1) = P\left(n_1 > -\frac{d}{2} \cap n_2 > -\frac{d}{2}\right)$$

$$= \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)\right)^2 = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)^2$$

$$P_e(\text{simb}) \equiv P(\text{error}) = \frac{1}{4} \left(P(\text{error} | S_1) + P(\text{error} | S_2) + P(\text{error} | S_3) + P(\text{error} | S_4) \right)$$

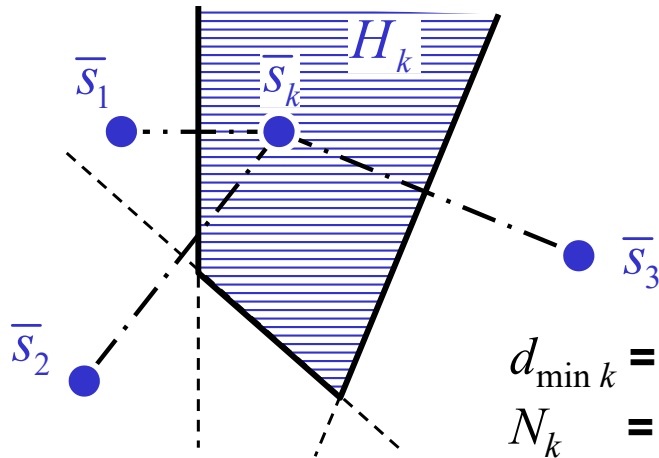
$$= 2Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) - Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)^2 \approx 2Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)$$

$$P_e(\text{bit}) \approx \frac{P_e(\text{simb})}{\log_2 M} \approx Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Codificación
Gray

$$\begin{cases} d = 2\sqrt{E_b} \\ \sigma_n^2 = N_0 / 2 \end{cases}$$

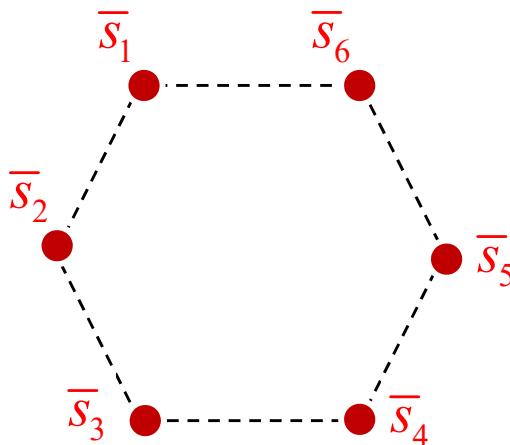
Probabilidad de error: Expresión aproximada



$$P_e(\text{simb}) \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_k Q\left(\frac{d_{\min k}}{2\sigma_n}\right)$$

$d_{\min k}$ = Distancia del símbolo \bar{s}_k a los símbolos más cercanos
 N_k = N° de símbolos a la mínima distancia de \bar{s}_k

- Caso particular: constelación “homogénea”**



$$d_{\min 1} = d_{16} = d_{12} = d_{\min 2} = d_{21} = d_{23} = \dots = d_{\min 6} = d_{65} = d_{61} = d_{\min k} = d_{\min}$$

$$N_1 = N_2 = \dots = N_6 = N_k = N$$

$$P_e(\text{simb}) \approx NQ\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_n}\right)$$

1.3 Ejemplos

Modulaciones Lineales

- Son aquellas modulaciones paso banda cuya señal transmitida admite la representación:

$$s(t) = \sum_n a_I[n] \psi_1(t - nT) + a_Q[n] \psi_2(t - nT)$$

con

$$\psi_1(t) = +Ah_T(t) \cos(2\pi f_c t)$$

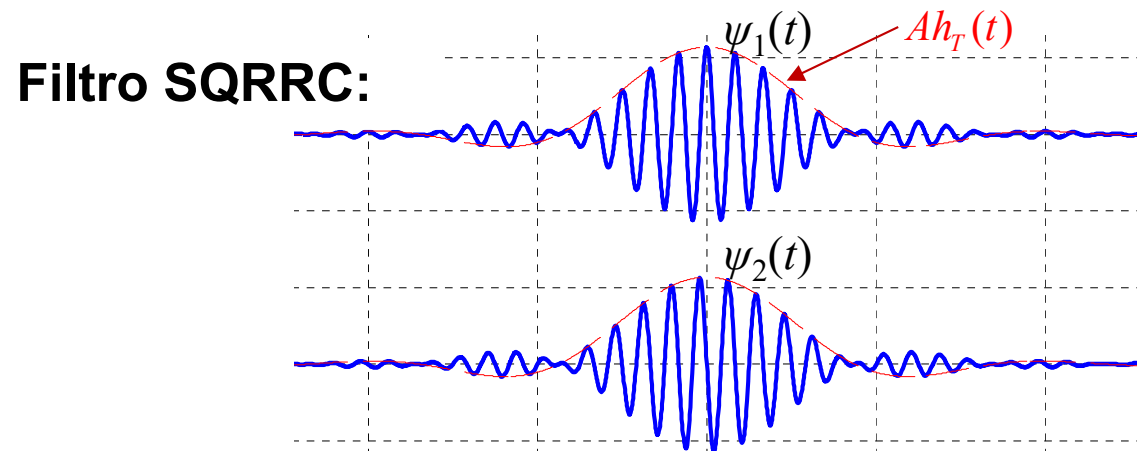
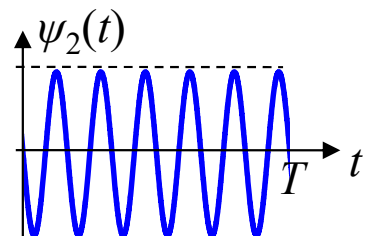
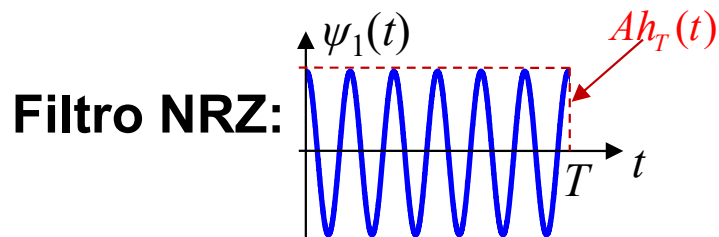
$$\psi_2(t) = -Ah_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$

- Secuencia de símbolos en fase, $a_I[n]$, y en cuadratura, $a_Q[n]$.

- Espacio de señal de dimensión $N=2$

- Ejemplos de base ortonormal:

Típicamente $f_c = n_c R_s = \frac{n_c}{T}$ con $n_c \gg 1$



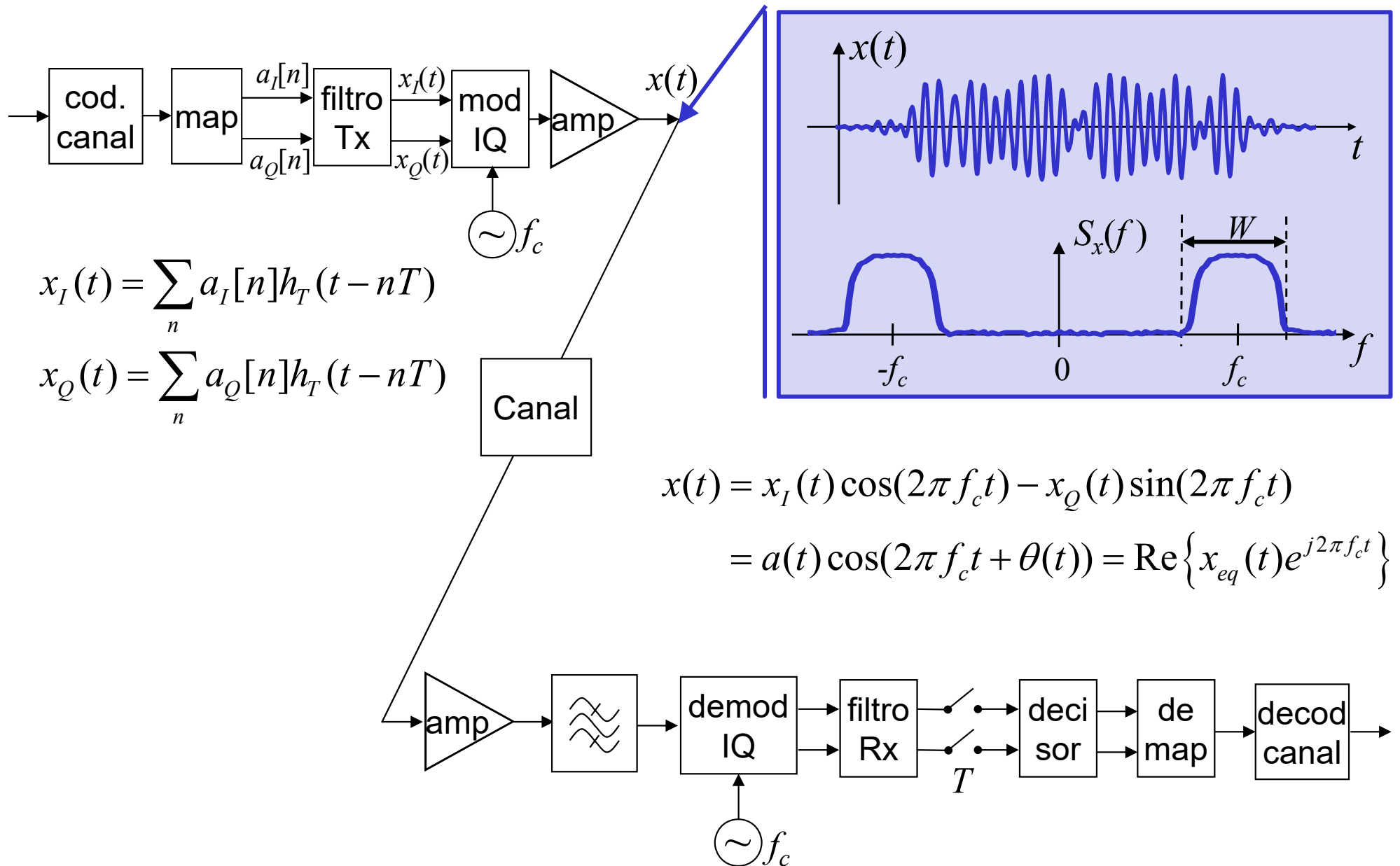
1.4 Análisis y simulación de sistemas de comunicaciones digitales

Análisis y simulación de comunicaciones digitales

A la hora de estudiar y simular (e, incluso, implementar) receptores y canales de comunicaciones digitales, podemos considerar tres niveles de análisis o de detalle:

- **Sistema completo**
- **Sistema equivalente paso bajo**
- **Sistema discreto equivalente**

Sistema Completo (ejemplo de modulación lineal)



Sistema Completo: frecuencia de muestreo

- **Simulación / Implementación**

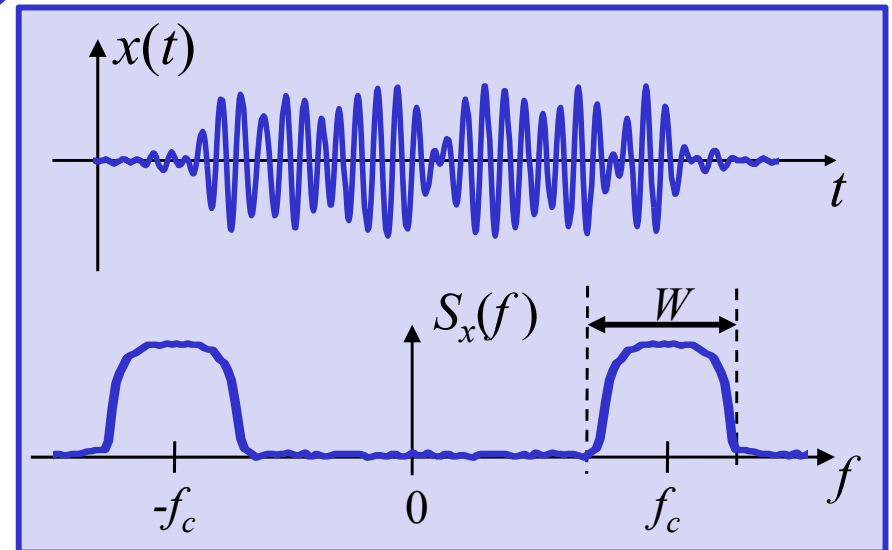
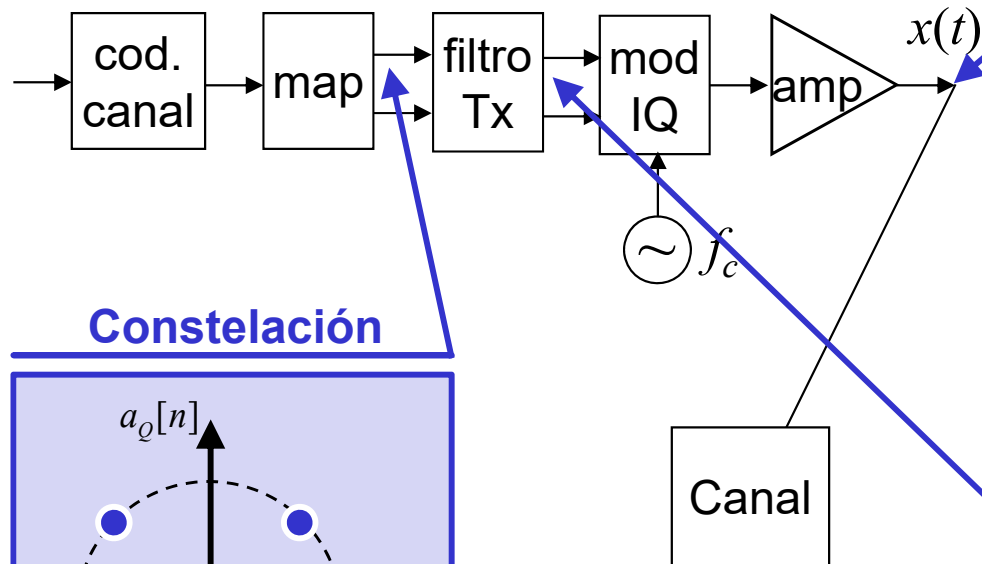
- **Muestreo de la señal pasobanda: Teorema de muestreo**

$$f_s \geq 2f_{\max} = 2(f_c + W / 2) = 2f_c + W$$

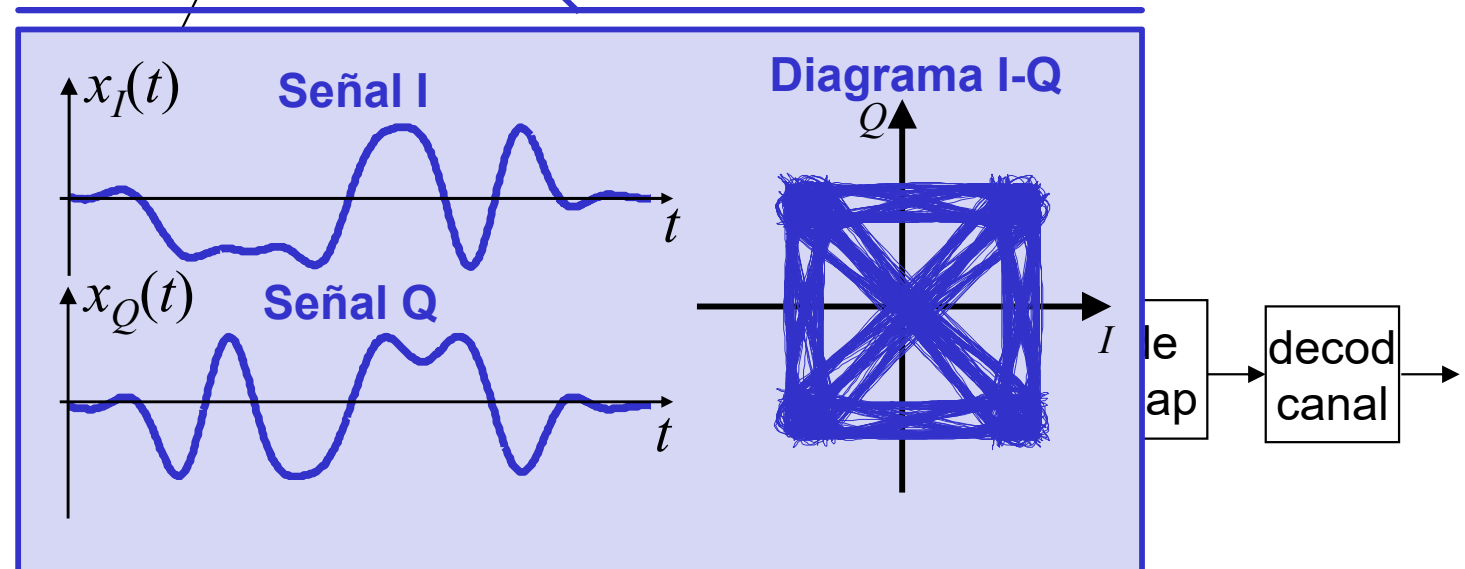
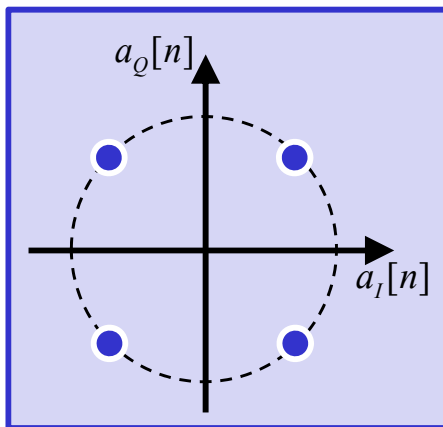
- **Frecuencia de muestreo muy elevada**
 - **coste computacional y memoria prohibitivos.**
- **Impráctico salvo excepciones**
 - **Cuando f_c baja (por ejemplo, modems telefónicos)**
 - **Sistemas SDR (“software defined radio”)**
- **Frecuencia de muestreo aún más elevada si se desea estudiar comportamientos no lineales.**

Sistema Completo: análisis del transmisor

Señal transmitida (paso banda)

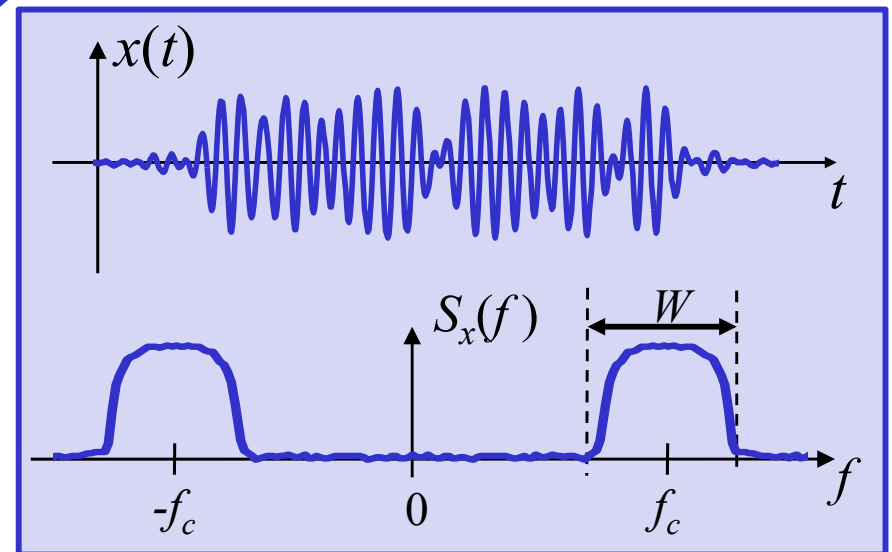


Constelación

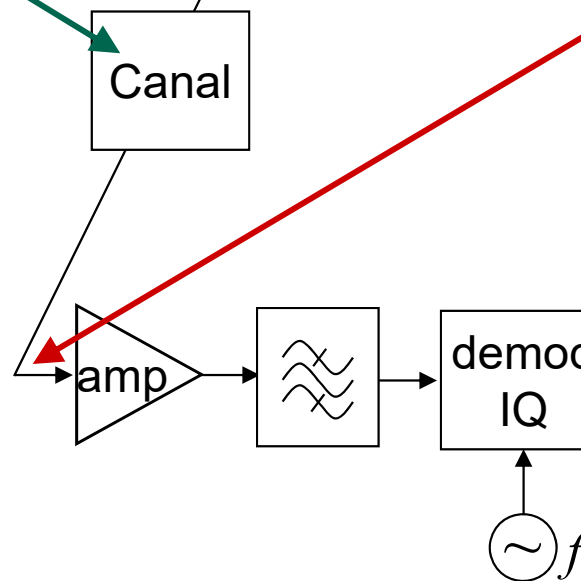
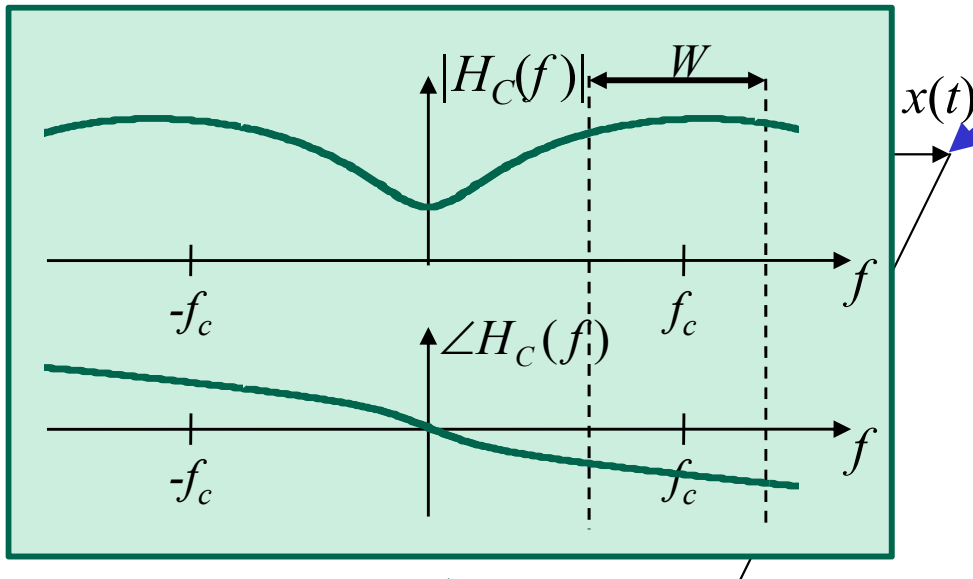
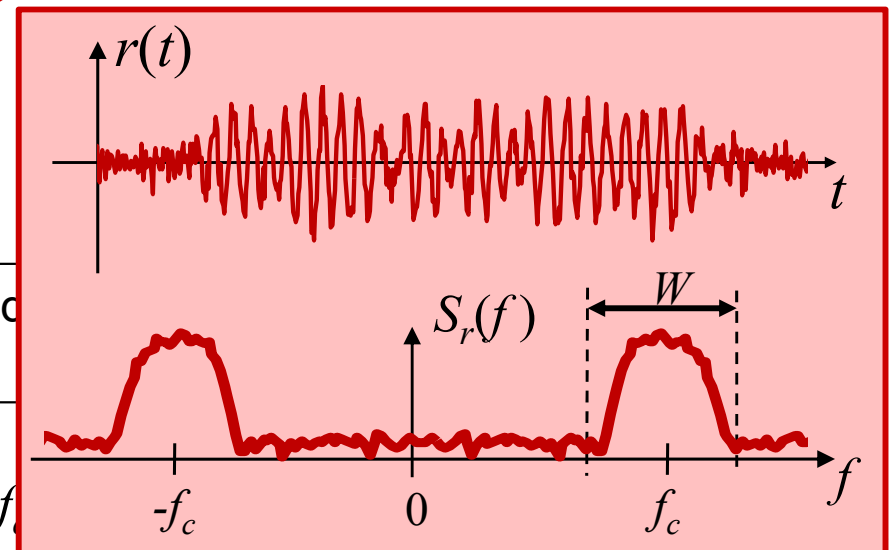


Sistema Completo: el canal

Señal transmitida (paso banda)

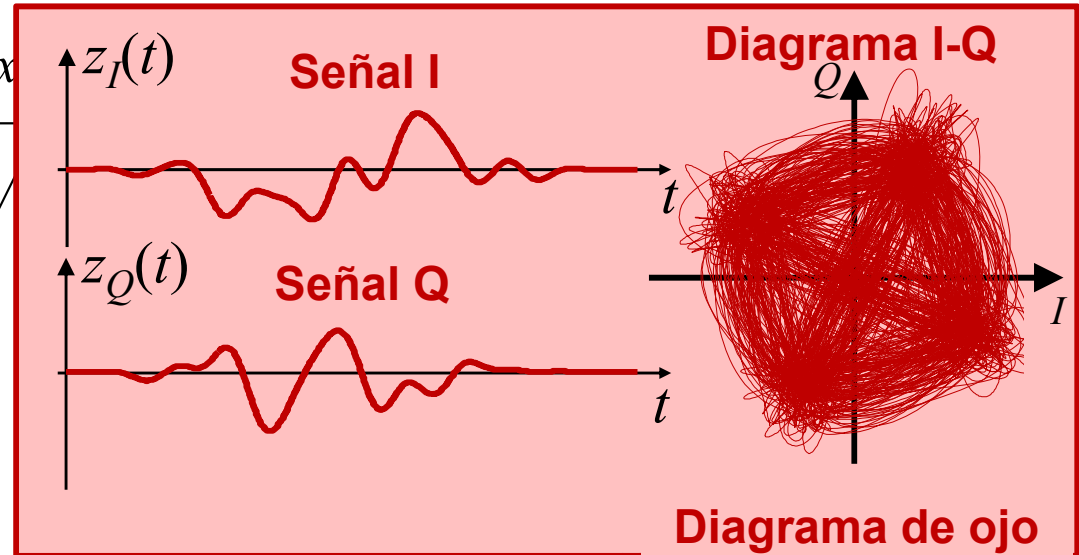
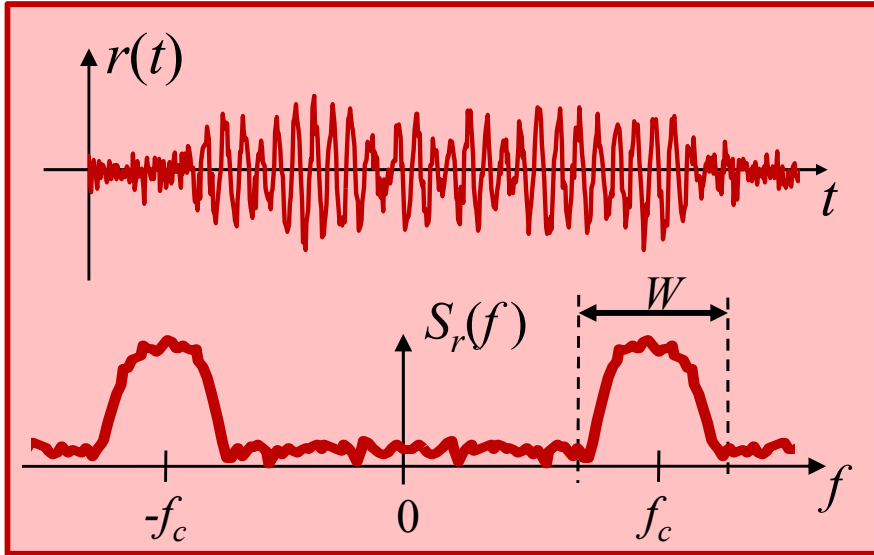


Señal recibida (paso banda)

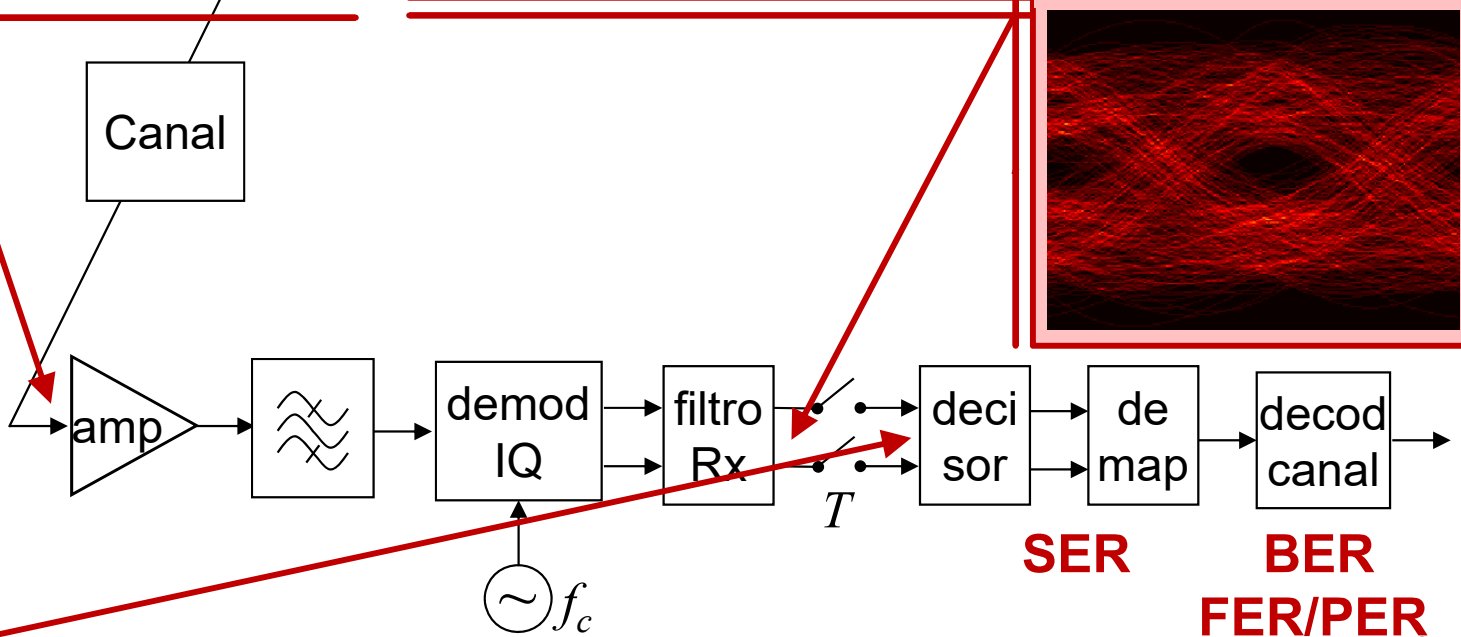
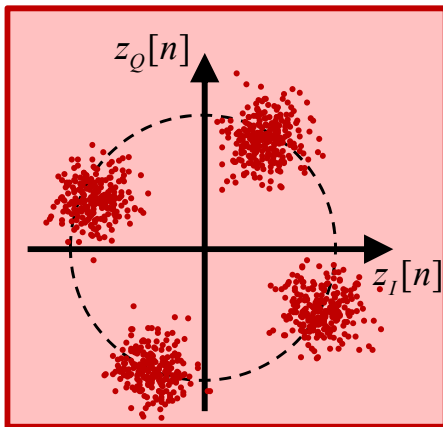


Sistema Completo: análisis del receptor

Señal recibida (paso banda)



Observables
(diagrama de dispersión)
(scatter plot)



SER
BER
FER/PER

Equivalente Paso Bajo: frecuencia de muestreo

- **Simulación / Implementación**

- Las señales I y Q son banda base con ancho de banda $W/2$
- **Muestreo de las señales banda base: Teorema de muestreo**

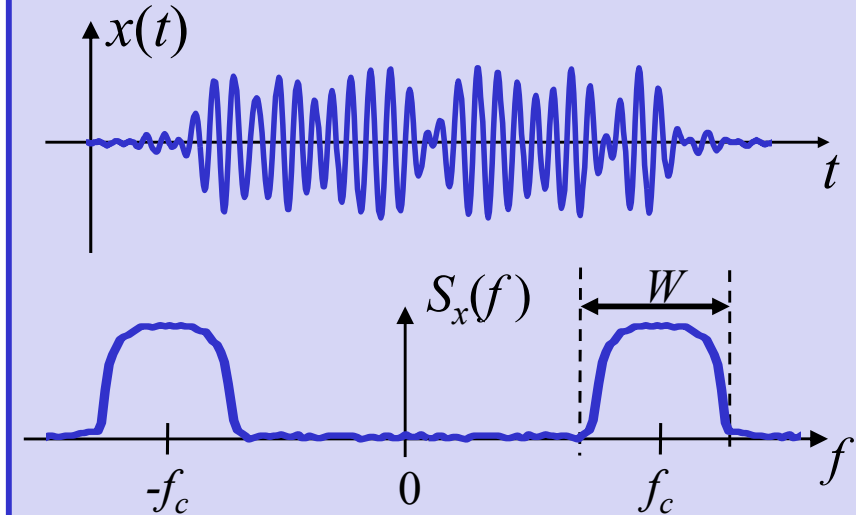
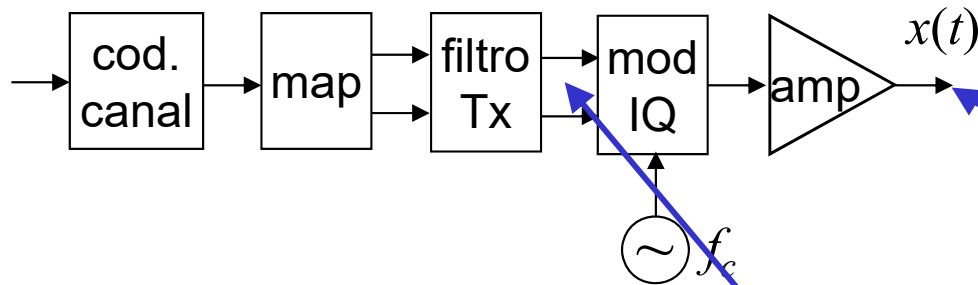
$$f_s \geq 2f_{\max} = 2(W/2) = W$$

- **Frecuencia de muestreo asumible. En la práctica**

$$f_s = LR_s \quad \text{con } L \text{ entero mayor que } 2$$

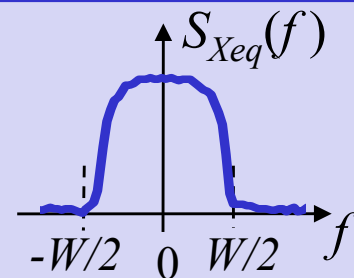
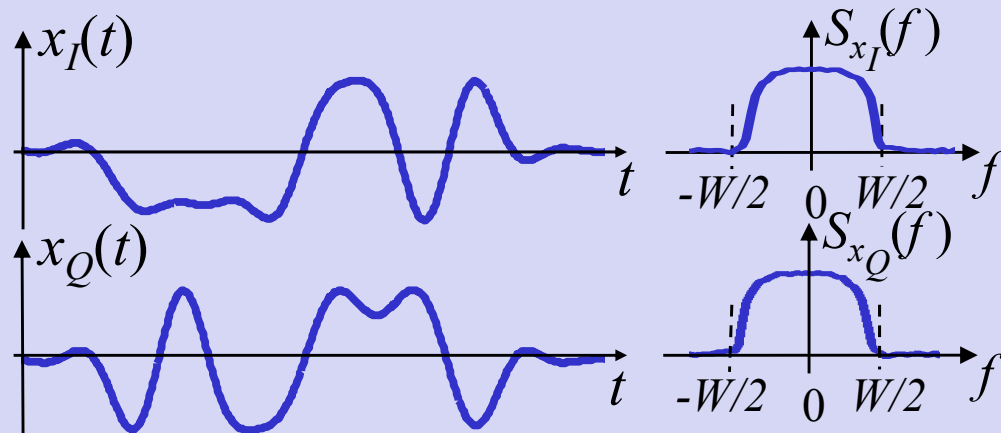
- **El canal, el ruido y las secciones del transmisor/receptor que operan a f_c se modelan por su equivalente paso bajo**

Equivalente Paso Bajo: Señales BB y PB

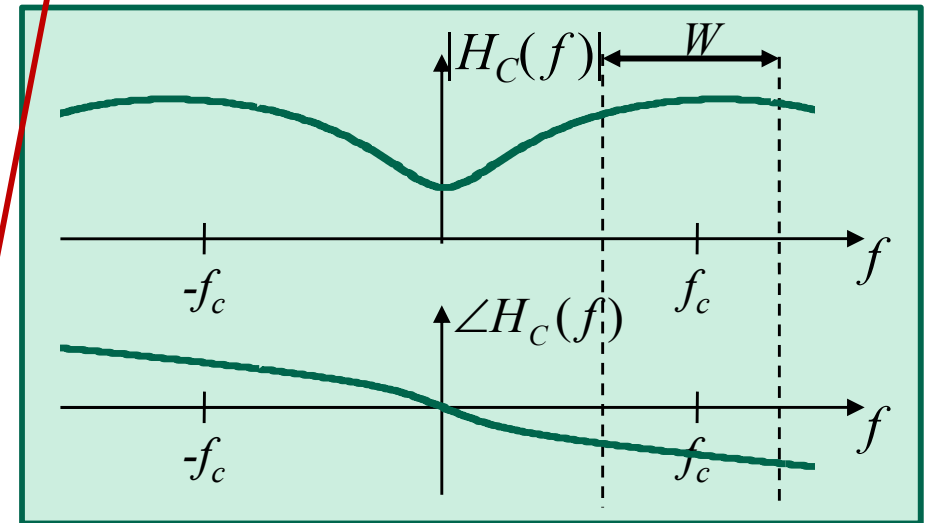
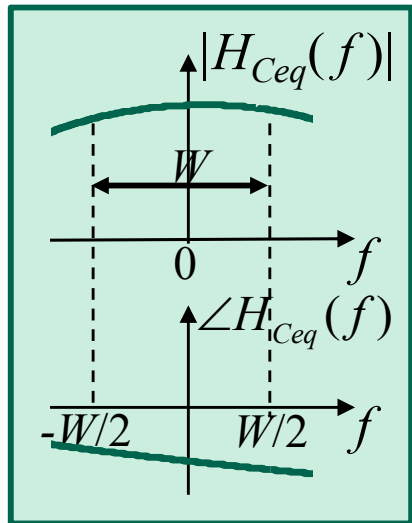
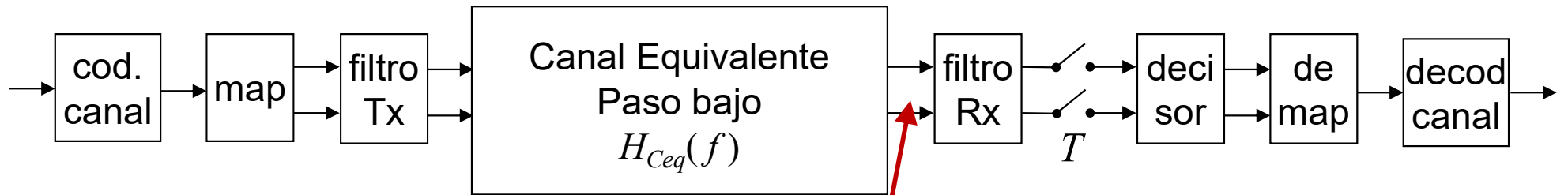


$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\
 &= a(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \\
 &= \text{Re} \left\{ x_{eq}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{eq}(t) &= x_I(t) + jx_Q(t) = a(t)e^{j\theta(t)} \\
 X_{eq}(f) &= X_I(f) + jX_Q(f) \\
 &= 2X(f + f_c)u(f + f_c)
 \end{aligned}$$



Equivalente Paso Bajo: Canal



$$H_{Ceq}(f) = H_C(f + f_c)u(f + f_c)$$

$$R_{eq}(f) = X_{eq}(f)H_{Ceq}(f)$$

$$r_{eq}(t) = x_{eq}(t) * h_{Ceq}(t)$$

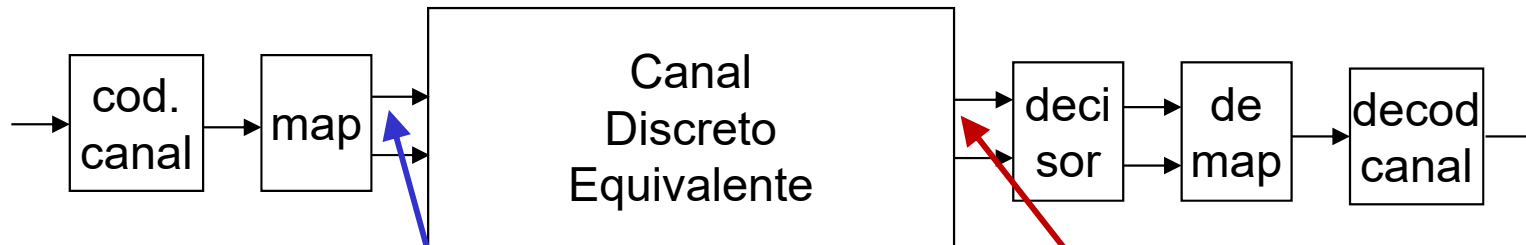
$$r_{eq}(t) = r_I(t) + jr_Q(t)$$

$$R_{eq}(f) = R_I(f) + jR_Q(f)$$

Equivalente Paso Bajo. Modo de trabajo

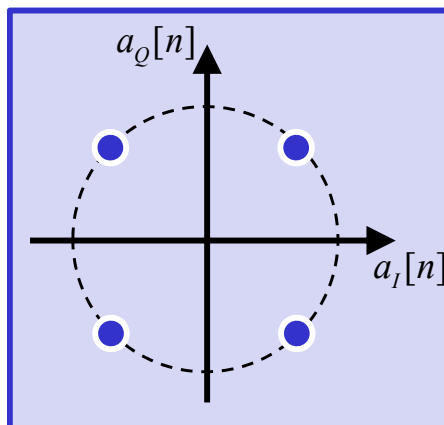
- **Se trabaja con señales equivalentes paso bajo**
 - Son señales banda base complejas (ancho de banda $W/2$ Hz)
 - Frecuencia de muestreo $f_s = LR_s > W$
- **El canal: equivalente paso bajo (es complejo)**
- **El ruido: equivalente paso bajo. Por ejemplo, AWGN complejo**
- **Otros efectos:** $r'[n] = r[n]e^{j\varphi[n]}$
 - Desfase constante φ : $\varphi[n] = \varphi$
 - Ruido de fase: $\varphi[n] \sim N(0, \sigma_\varphi^2)$
 - Offset de frecuencia Δf : $\varphi[n] = 2\pi \frac{\Delta f}{f_s} n$
- **Podemos “olvidar” las traslaciones frecuenciales**

Sistema discreto equivalente



- Se trabaja a $f_s = R_s$, es decir, 1 muestra/símbolo
- Salvo por factores de escala, equivale a trabajar en espacio de señal (el de modulaciones lineales)

Constelación



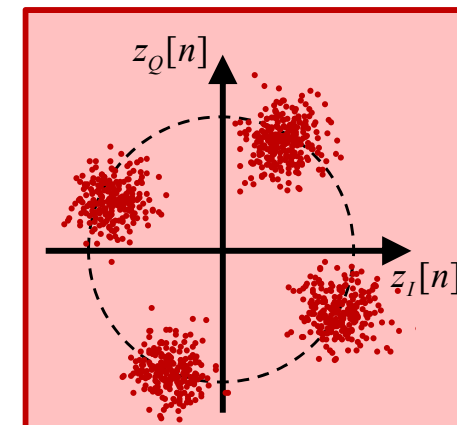
$$z[n] = (a[n] * h_{ce}[n]) e^{j\varphi[n]} + w[n]$$

$h_{ce}[n]$: canal discreto equivalente

$\varphi[n]$: errores de fase/frecuencia

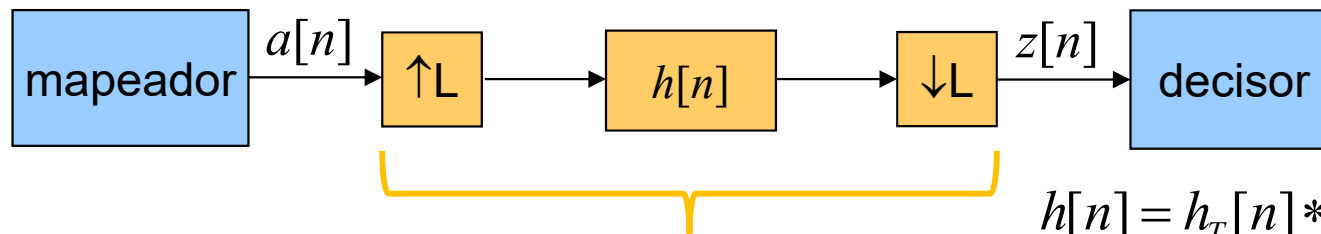
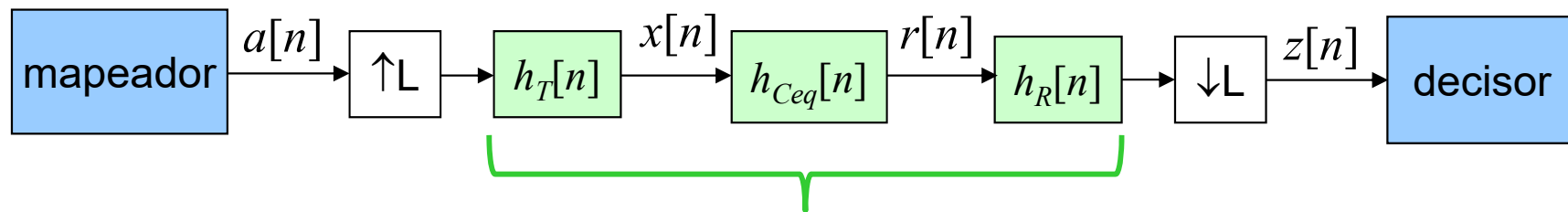
$w[n]$: ruido aditivo (complejo)

Observables
(scatter plot)

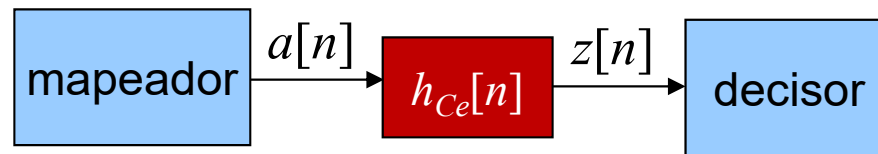


Canal Discreto Equivalente

- A partir del canal equivalente paso bajo
- Incorpora los filtros conformadores Tx y Rx



$$h[n] = h_T[n] * h_{Ceq}[n] * h_R[n]$$



$$h_{Ce}[n] = h[nL]$$